

Exercice 1

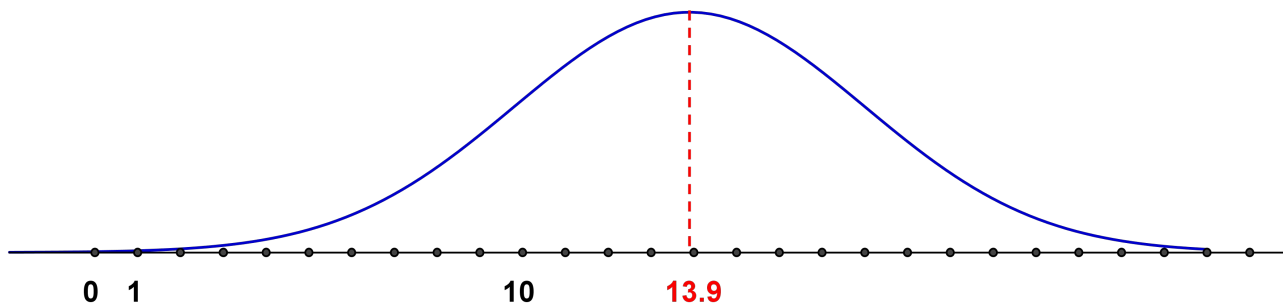
4 points

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heure, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ .

La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $P(T \geq 22) = 0,023$.

En exploitant cette information :

- hachurer sur le graphique donné en annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023 ;
- déterminer $P(5,8 \leq T \leq 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.

2. On choisit un jeune en France au hasard.

Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millièm.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des oeuvres et la protection des droits sur internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère.

Ainsi, elle propose le protocole ($\mathcal{P}$) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- L'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? »

☐ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;

☐ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;

☐ si le résultat du lancer est « 3 » ou « 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1. Calculs de probabilités

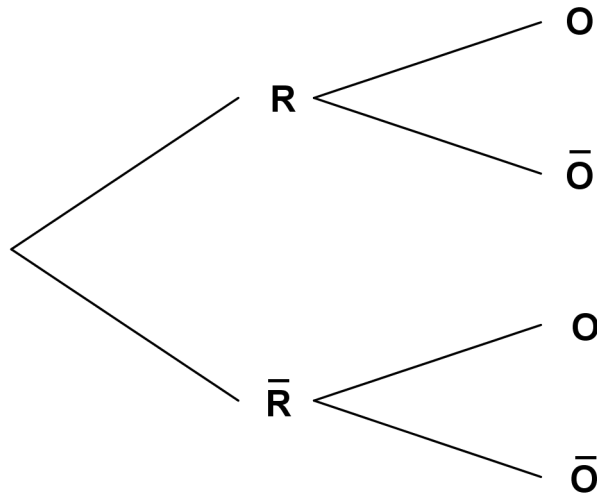
On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole $(\mathcal{P})$.

On note :

R l'événement « le résultat du lancer est pair »

O l'événement « le jeune a répondu Oui »

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'événement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$$

2. Intervalle de confiance

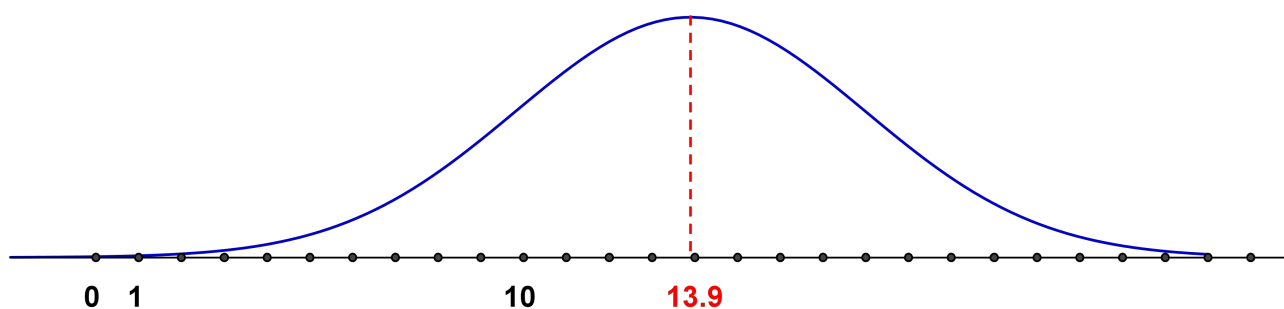
a. A la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole $(\mathcal{P})$.

Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « Oui ».

Donner un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population de jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

ANNEXE
EXERCICE 1
(à compléter et à rendre avec la copie)



CORRECTION

Partie A

1.a. T suit une loi normale de moyenne μ donc pour tout nombre réel positif a :

$$P(\mu + a \leq T) = P(T \leq \mu - a)$$

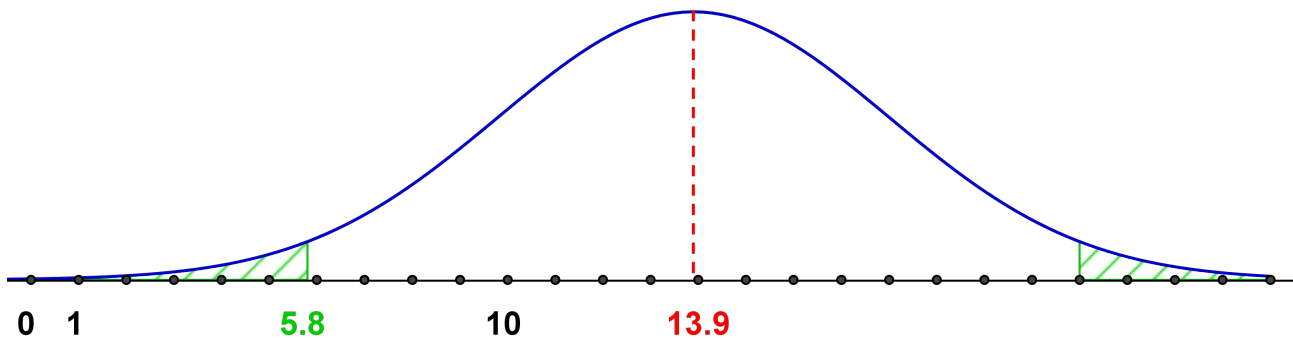
Or $\mu = 13,9$, pour $a = 22 - 13,9 = 8,1$

$$P(13,9 + 8,1 \leq T) = P(22 \leq T) = 0,023 \text{ donc } P(T \leq 13,9 - 8,1) = P(T \leq 5,8) = 0,023$$

$P(22 \leq T)$ est l'aire en U.A. du domaine plan compris entre la courbe représentative de la fonction de densité et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[22; +\infty[$.

$P(T \leq 5,8)$ est l'aire en U.A. du domaine plan compris entre la courbe représentative de la fonction de densité et l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty; 5,8]$.

On a hachuré en vert ces deux domaines (d'aire 0,023 U.A.) sur la figure donnée en annexe.



b. On a $P(5,8 \leq T < 22) = 1 - P(T < 5,8) - P(22 < T) = 1 - 0,023 - 0,023 = 0,954$.

Or nous connaissons le résultat suivant :

Si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ alors $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,954$.

On obtient pour T : $2\sigma = 8,1$ et $\sigma = 4,05$.

On arrondit au dixième à $\sigma = 4,1$.

2. On nous demande de déterminer $P(18 \leq T)$

En utilisant la calculatrice on obtient : $P(18 \leq T) = 0,1587$

On arrondit au centième.

$$P(18 \leq T) = 0,16$$

Partie B

1. Le dé est bien équilibré.

Il y a 3 nombres pairs et trois nombres impairs donc $P(R) = P(\bar{R}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$P_R(O) = p$$

Le jeune donne une réponse sincère et p est la proportion de jeunes âgés de 16 à 24ans qui pratiquent, au moins une fois par semaine, le téléchargement illégal sur internet.

$$P_R(\bar{O}) = 1 - p$$

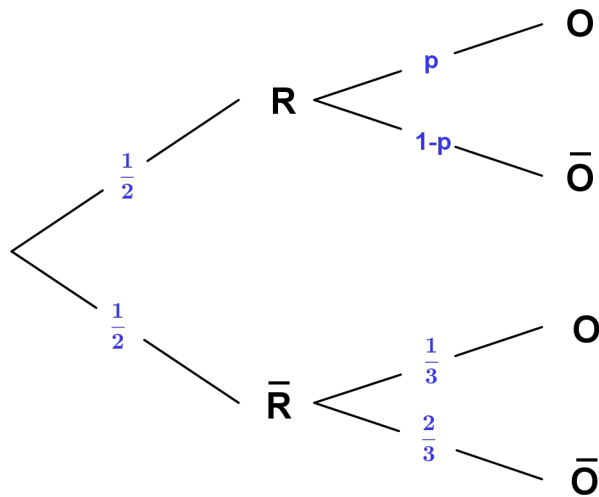
$$P_{\bar{R}}(O) = \frac{1}{3}$$

Il y a 3 nombres impairs et un seul donnant la réponse « Oui ».

$$P_{\bar{R}}(\bar{O}) = \frac{2}{3}$$

Il y a 2 nombres impairs donnant la réponse « Non ».

On obtient l'arbre pondéré suivant :



$$q = P(O)$$

En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(O) = P(R \cap O) + P(\bar{R} \cap O)$$

$$P(R \cap O) = P(\bar{R}) \times P_R(O) = \frac{1}{2} \times p$$

$$P(\bar{R} \cap O) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(O) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{donc } q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$$

2.a. La proportion de réponses « Oui » dans l'échantillon est : $\frac{625}{1500} = 0,417$ (on arrondit au millième).

La taille de l'échantillon est 1500, on obtient pour intervalle de confiance au niveau de

$$\text{confiance 95 \% : } I = \left[0,417 - \frac{1}{\sqrt{1500}}; 0,417 + \frac{1}{\sqrt{1500}} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1500}} = 0,026 \text{ (on arrondit au millième)}$$

$$I = [0,391; 0,443]$$

b. On a : $0,391 \leq q \leq 0,443$

$$\text{or } q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \text{ c'est à dire } p = 2q - \frac{1}{3}$$

$$2 \times 0,391 - \frac{1}{3} \leq 2q - \frac{1}{3} \leq 2 \times 0,443 - \frac{1}{3}$$

$$0,449 \leq 2q - \frac{1}{3} \leq 0,553$$

Conclusion

Au niveau de confiance de 95 %, on a :

$$0,449 \leq p \leq 0,553 .$$