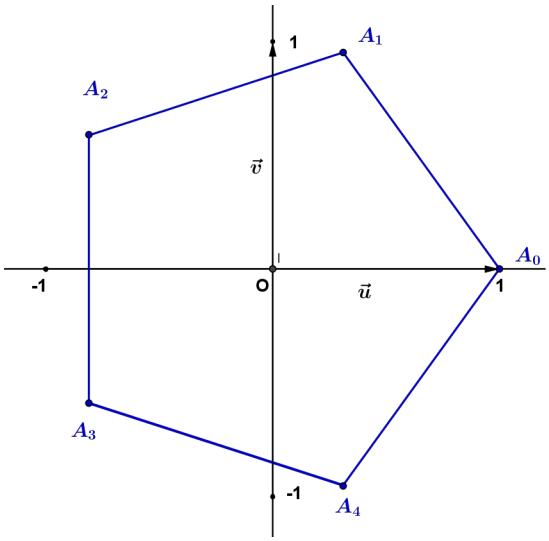
Exercice 2 — 3 points

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0}=\vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ ci-dessous :

- les cinq côtés ont la même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent an cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0;1;2;3\}$ on a $(\overrightarrow{OA_k}\ ;\ \overrightarrow{OA_{k+1}})=\dfrac{2\pi}{5}$



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{i}{2}$.

Le cercle ($\mathscr{C}$) de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment [BJ] en un point K.

Calculer BJ, puis en déduire BK.

2.a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

b. Démontrer que $BA_2^2=2+2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$

c. Un logiciel de calcu formel affiche les résultats ci-dessous que l'on pourra utiliser sans justification :

	Calcul formel
1	cos(4*pi/5)
	→ $\frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1)$
2	sqrt((3-sqrt(5))/2)
	→ $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

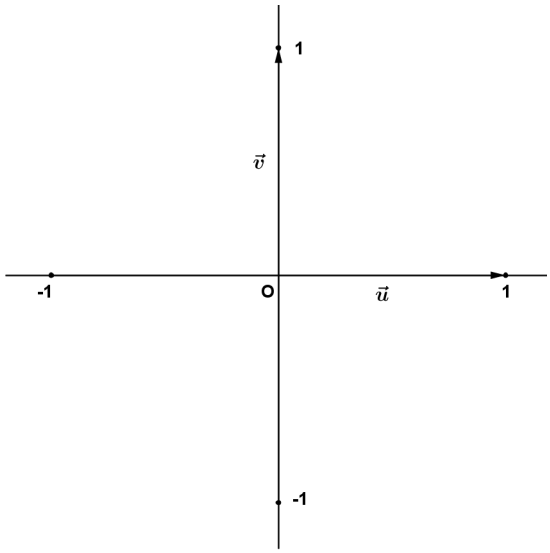
En déduire, grâce à ces résultats que $BA_2=BK$

3. Dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ donné en annexe, à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparent les traits de constructions.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

ANNEXE
EXERCICE 2
(à compléter et à remettre avec la copie)

-



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. $B(-1)$ et $J\left(\frac{i}{2}\right)$

Le cercle ($\mathscr{C}$) de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment [BJ] en un point K.

$\overrightarrow{BJ}\left(\frac{i}{2}+1\right)$ $BJ^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ et $BJ=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

K appartient au cercle ($\mathscr{C}$) donc $KJ=\frac{1}{2}$

K appartient au segment [BJ] donc $BK=BJ-JK=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

2.a. A_2 appartient au cercle trigonométrique donc $OA_2=1$ et on a :

$(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_2})=(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OA_1}\ ;\ \overrightarrow{OA_2})\quad(2\pi)$

$(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_2})=\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\quad(2\pi)$

$(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_2})=\frac{4\pi}{5}\quad(2\pi)$

On obtient pour l'affixe de A_2 : $z_2=e^{i\frac{4\pi}{5}}=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

b. $\overrightarrow{BA_2}\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}+1\right)$ $\overrightarrow{BA_2}\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$

$BA_2^2=\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)=1+\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$BA_2^2=\left(\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=1+1+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$BA_2^2=2+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

En utilisant le résultat donné dans l'énoncé : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})$ on obtient

$BA_2^2=2+2\left(\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\right)=2+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

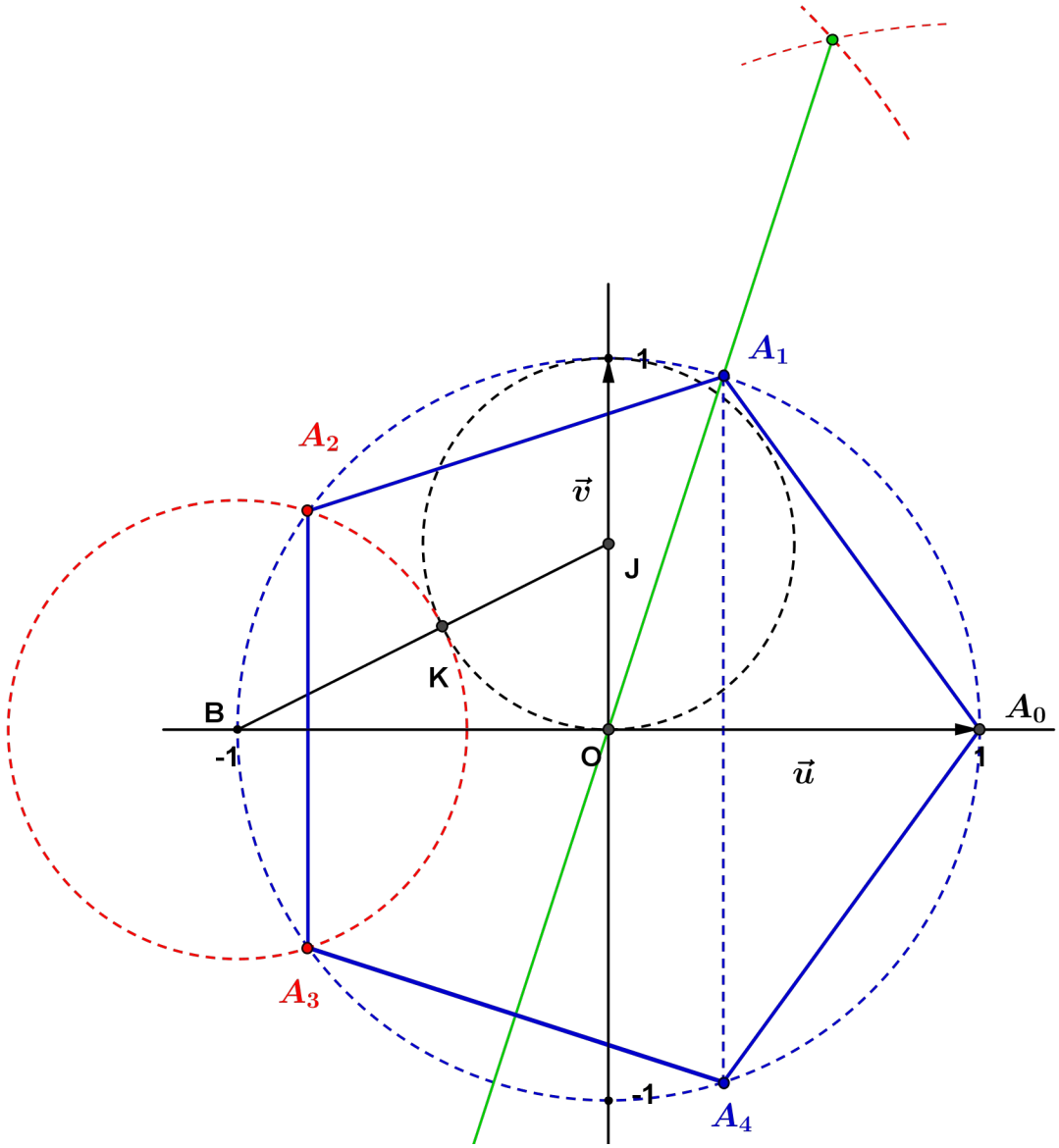
En utilisant le résultat donné dans l'énoncé : $\sqrt{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ on obtient

$BA_2=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=BK$

3. Sur la figure donnée en annexe, on place le point J (on peut construire à la règle et au compas un milieu).
On construit le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1 (en bleu sur le dessin).
On tace le segment [BJ].
On construit le cercle ($\mathscr{C}$) de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ (en noir sur le dessin). Ce cercle passe par le point O.
K est le point d'intersection de ($\mathscr{C}$) et [BJ].
On construit le cercle de centre B passant par K (en rouge sur le dessin)
$BA_2=BK$ donc A_2 appartient à ce cercle

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

A_2 est le point d'intersection, d'ordonnée positive, du cercle précédent et du cercle trigonométrique.
Pour construire A_1, on construit la bissectrice de l'angle $\widehat{A_0OA_2}$ (on détermine l'un des points d'intersection de deux cercles de même rayon et de centres respectifs A_0 et A_2)
Pour construire A_3, on peut construire le symétrique de A_2 par rapport à l'axe des abscisses ou on peut vérifier que A_3 est le point d'intersection d'ordonnées négative des deux cercles précédents.
Pour construire A_4 on peut construire le symétrique de A_1 par rapport à l'axe des abscisses ou de constuire la bissectrice de l'angle $\widehat{A_3OA_0}$.
On joint la figure, donnée en annexe, complétée



<u>Remarque</u> (*Démonstration non demandée)*
On peut facilement calculer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
Sachant que les coordonnées du point A_2 sont :
$\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right);\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, on en déduit que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ est l'abscisse des points d'intersection du cercle trigonométrique et du cercle ($\mathscr{C}$).
Le cercle ($\mathscr{C}$) a pour équation : $(x+1)^2+y^2=BK^2$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Or $BK^2=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2=\frac{1}{4}(5-2\sqrt{5}+1)=\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

On considère le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x+1)^2+y^2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \end{cases}$$

Par soustraction

$x^2+2x+1-x^2+y^2-y^2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})-1$

$2x=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})-2$

$x=\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})-1=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})$

donc $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés