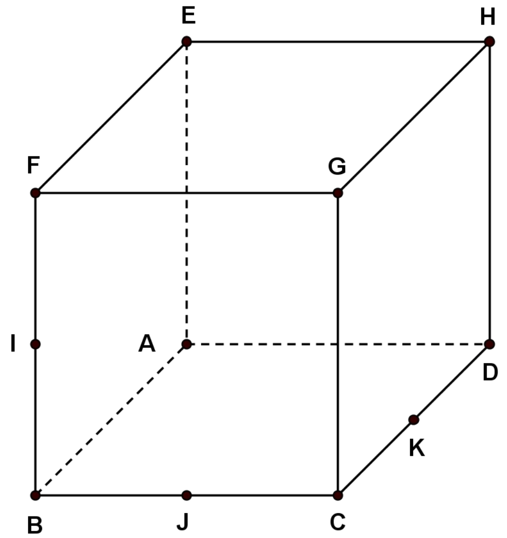
Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1
Le point I est le milieu du segment [BF]
Le point J est le milieu du segment [BC]
Le point K est le milieu du segment [CD]



Partie A
Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction

. le point L ;
. l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
. le section du cube par le plan (IJK).

Partie B
L'espace est rapporté au repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2.a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0;1] tel que :
$\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AG}$

a. Démontrer que $MI^2=3t^2-3t+\frac{5}{4}$

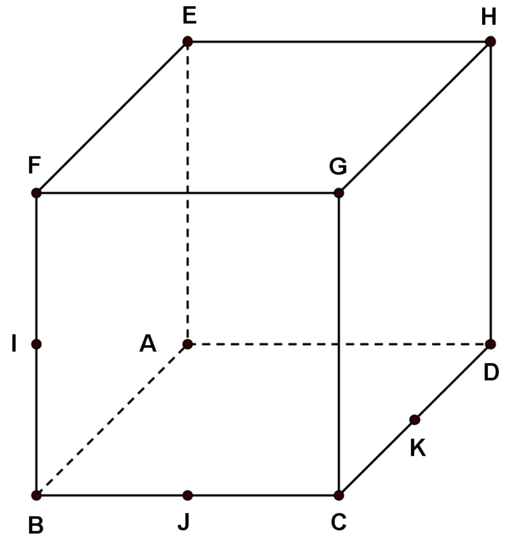
b. Démontrer que la distance est minimale pour le point $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

4. Démontrer que pour ce point $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

a. M appartient au plan (IJK).

b. La droite (IM) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

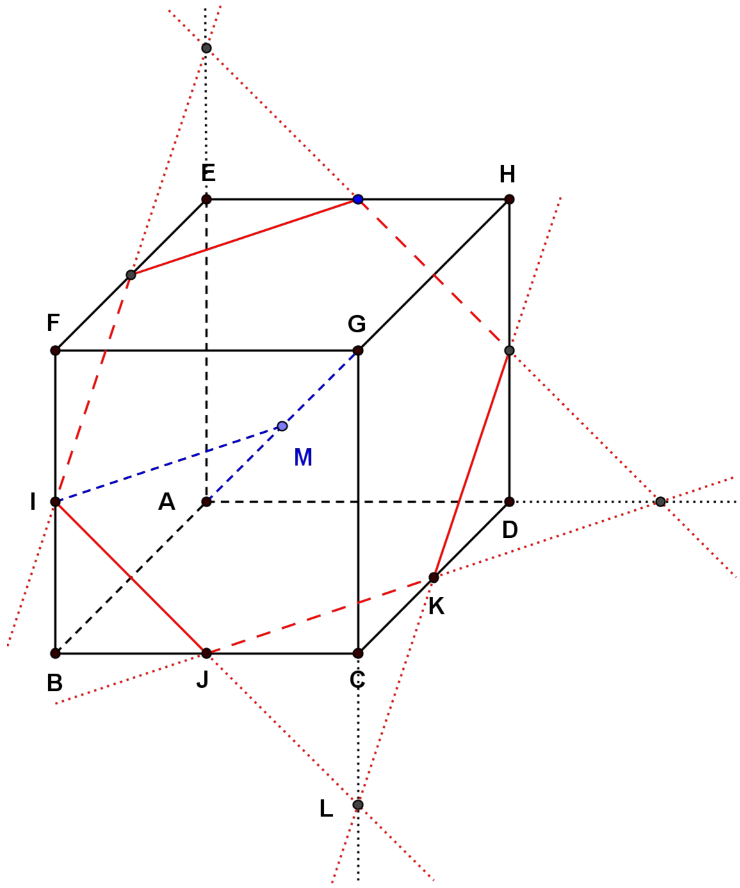
ANNEXE
EXERCICE 3
(à compléter et à remettre avec la copie)



CORRECTION

Partie A

On joint la figure, donnée en annexe, complétée



La droite $\mathscr{D}$ d'intersection des plans (IJK) et (CDH) est la droite (LK).
La section du cube par le plan (IJK) est un hexagone (on peut démontrer que cet hexagone est régulier et que la longueur d'un côté est : $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Partie B

1. $A(0;0;0)$; $G(1;1;1)$; $I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$; $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$; $K\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

2.a. $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (IJK) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vercteurs non colinéaires du plan (IJK) par exemple les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\frac{1}{2}+1\times(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IK}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times 1+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$$

Conclusion

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. $M(x;y;z)$ appartient au plan (IJK) si et seulement si $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IM}=0$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

donc $1\times(x-1)+1\times y+1\times(z-\frac{1}{2})=0$

$(IJK): x+y+z-\frac{3}{2}=0$

3. t est un nombre réel de l'intervalle [0;1], $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$

a. $\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}1-t\\-t\\\frac{1}{2}-t\end{pmatrix}$

$MI^2=(1-t)^2+(-t)^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\frac{1}{4}$

$MI^2=3t^2-3t+\frac{5}{4}$

b. On détermine le minimum du trinôme : $T(t)=3t^2-3t+\frac{5}{4}$ sur l'intervalle [0;1].

$T'(t)=6t-3$

$6t-3\geqslant 0 \Leftrightarrow t\geqslant\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$6t-3<0 \Leftrightarrow t<\frac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
T'(t)		–	0	+	
T(t)	$\frac{5}{4}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{5}{4}$

$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}$

La distance minimale de MI est obtenue pour $t=\frac{1}{2}$ donc pour le point $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Remarque

Cette distance minimale est égale à $\frac{1}{2}$.

4.a. $(\text{IJK}) : x+y+z-\frac{3}{2}=0$ $\quad \text{M}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$ donc M appartient au plan (IJK).

b. $\text{A}(0;0;0)$; $\text{G}(1;1;1)$; $\text{M}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

donc le point M est le milieu de [AG] et M appartient à la droite (AG).
I et M sont deux points appartenant au plan (IJK) donc la droite (IM) est contenue dans le plan (IJK).
Le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (IJK) donc (AG) est orthogonale à (IM).
<u>Conséquence</u>
Les droites (IM) et (AG) sont perpendiculaires.

. $\text{B}(1;0;0)$; $\text{F}(1;0;1)$; $\text{M}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\text{I}\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{\text{BF}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\text{IM}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{BF}}.\overrightarrow{\text{IM}}=0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times\left(\frac{1}{2}\right)+1\times 0=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{BF}}$ et $\overrightarrow{\text{IM}}$ sont orthogonaux donc les droites (BF) et (IM) sont orthogonales.
I est le milieu de [BF] donc I appartient à la droite (BF).
<u>Conséquence</u>
les droites (IM) et (BF) snt perpendiculaires.
<u>Conclusion</u>
La droite (IM) est la perpendiculaire commune aux deux droites (non coplanaires) (BF) et (AG).