

Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère la matrice M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M . On le note $\det(M)$.

Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.

Justifier que N est l'inverse de M .

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$

On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a; b)$ solution de l'équation (E).

a. Vérifier que le couple $(6; 3)$ est solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(a; b)$ est solution de (E) si et seulement si :

$$3(a - 6) = 5(b - 3)$$

En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q .

2. Codage avec la matrice Q

Pour coder un mot deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Etape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Etape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

Etape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Etape 4 : A la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau correspondance de l'étape 1.

Exemple :

$$\mathbf{JE} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{OF}$$

Le mot **JE** est codé en le mot **OF**.

Coder le mot **DO**.

3. Procédure de décodage

On conserve les mêmes notations que pour le codage.

Lors du codage la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$

- Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que
$$\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 (26) \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 (26) \end{cases}$$
- en remarquant que $3 \times 9 \equiv 1 (26)$ montrer que
$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 (26) \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 (26) \end{cases}$$
- Décoder le mot **SG**.

CORRECTION

Partie A

1. M est la matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

On note P la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$ donc $N = \frac{1}{\det(M)} P$;

On calcule MP puis PM

$$MP = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 5b & 3b - 3b \\ 15 - 15 & -5b + 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 5b & 0 \\ 0 & 3a - 5b \end{pmatrix}$$

$$MP = (3a - 5b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PM = \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 5b & 3b - 3b \\ -5a + 5a & -5b + 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 5b & 0 \\ 0 & 3a - 5b \end{pmatrix}$$

$$PM = (3a - 5b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conséquence

$$NM = \frac{1}{\det(M)} PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MN = \frac{1}{\det(M)} MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice N est la matrice inverse de la matrice M.

2. (E) : $\det(M) = 3 \Leftrightarrow 3a - 5b = 3$

a. $3 \times 6 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$

donc (6;3) est un couple solutions de (E).

b. (a;b) est solution de (E) $\Leftrightarrow 3a - 5b = 3 \Leftrightarrow 3a - 5b = 3 \times 6 - 5 \times 3 \Leftrightarrow 3a - 3 \times 6 = 5b - 5 \times 3$
 $\Leftrightarrow 3(a - 6) = 5(b - 3)$

3 divise $5(b - 3)$ et 3 est premier avec 5, le théorème de GAUSS nous permet d'affirmer que 3 divise (b-3) donc il existe un entier relatif k tel que $b - 3 = 3k$.

Conséquence

$3(a - 6) = 5(3k)$ donc $a - 6 = 5k$ et $a = 5k + 6$ et $b = 3k + 3$

Réciproquement

Pour **tout entier relatif k**, si $a = 5k + 6$ et $b = 3k + 3$ alors :

$3a - 5b = 3(5k + 6) - 5(3k + 3) = 15k - 18 - 15k - 15 = 3$ donc le couple $(5k + 6; 3k + 3)$ est solution de (E).

Conclusion

l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des couples d'entiers relatifs de la forme $(5k + 6; 3k + 3)$ avec k appartenant à $\mathbb{Z}$.

Partie B

1. $\det(Q) = 3 \times 6 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$ donc $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

2. On considère le mot : **DO** on obtient $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\text{on a } Y = QX = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 42 \\ 15 + 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix}$$

$$60 = 2 \times 26 + 8 \quad \text{donc} \quad r_1 = 8$$

$$57 = 2 \times 26 + 5 \quad \text{donc} \quad r_2 = 5$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{en utilisant le tableau on obtient le mot : IF}$$

Conclusion

Le mot **DO** est codé en le mot **IF**.

$$3.a. \quad Y = QX \Leftrightarrow Q^{-1}Y = Q^{-1}(QX) \Leftrightarrow Q^{-1}Y = (Q^{-1}Q)X = X$$

$$\text{donc} \quad 3X = 3Q^{-1}Y$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$3X = 3Q^{-1}Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 3y_1 - 3y_2 \\ 3x_2 = -5y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

$$\text{Or} \quad y_1 \equiv r_1(26) \quad \text{et} \quad y_2 \equiv r_2(26)$$

$$\text{On obtient} \quad \begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2(26) \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2(26) \end{cases}$$

$$b. \quad 3 \times 9 = 26 = 1 \times 26 + 1 \quad \text{et} \quad 3 \times 9 \equiv 1(26)$$

$$\begin{cases} 9 \times 3x_1 \equiv 9 \times 3r_1 - 9 \times 3r_2(26) \\ 9 \times 3x_2 \equiv 9 \times (-5)r_1 + 9 \times 6r_2(26) \end{cases}$$

$$9 \times (-5) = -45 = -2 \times 26 + 7 \quad \text{donc} \quad 9 \times (-5) \equiv 7(26)$$

$$9 \times 6 = 54 = 2 \times 26 + 2 \quad \text{donc} \quad 9 \times 6 \equiv 2(26)$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2(26) \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2(26) \end{cases}$$

$$c. \quad \mathbf{SG} \rightarrow \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \equiv 18 - 6(26) \quad x_1 \equiv 12(26)$$

$$x_2 \equiv 7 \times 18 + 2 \times 6(26)$$

$$x_2 \equiv 126 + 12(26)$$

$$x_2 \equiv 138(26)$$

$$138 = 5 \times 26 + 8$$

$$x_2 \equiv 8(26)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{MI}$$

Le mot **SG** est décodé en le mot **MI**.