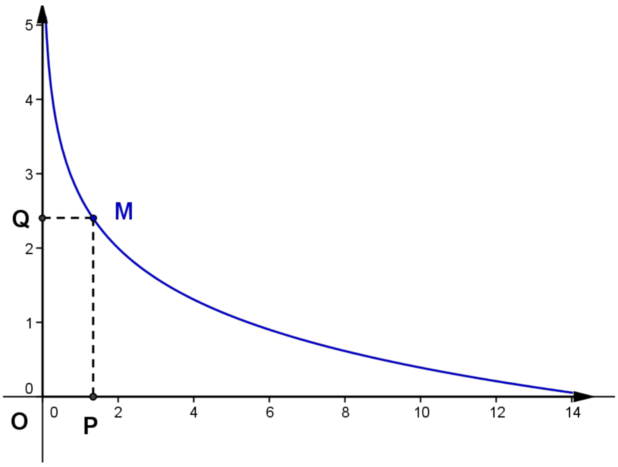
Exercice 4 *3 points*

Soit f la fonction définie sur]0;14] par : $f(x)=2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous.



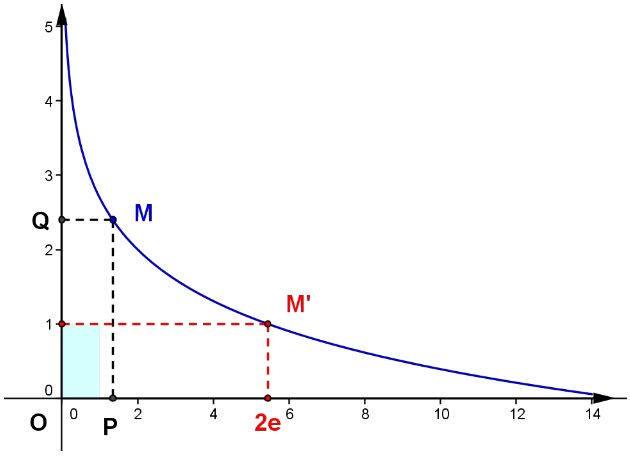
A tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
  Si oui préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

CORRECTION

L'unité d'aire est l'aire du rectangle coloré en bleu sur la figure suivante :



. Pour démontrer que l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante il suffit de trouver deux valeurs distinctes de x pour lesquelles les aires sont distinctes.
Pour $x=2$ $\quad$ $\mathrm{f}(2)=2-\ln(1)=2$ et l'aire du rectangle OPMQ est $\mathscr{A}(2)=2$ U.A.
Pour $x=4$ $\quad$ $\mathrm{f}(4)=2-\ln(2)$ et l'aire du rectangle OPMQ est $\mathscr{A}(4)=4(2-\ln(2))=8-4\ln(2)$
$\mathscr{A}(4)=5{,}23$ à 10^{-2} près donc $\mathscr{A}(4)\neq\mathscr{A}(2)$ et la réponse est : l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante.

. Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;14], l'aire du rectangle OPMQ est :
$\mathscr{A}(\mathrm{x})=x\left(2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
$\mathscr{A}$ est dérivable sur]0;14].
On dérive un produit
$\mathrm{u}(x)=x \qquad \mathrm{u}'(x)=1$
$\mathrm{v}(x)=2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)=2-(\ln(x)-\ln(2))=2-\ln(x)+\ln(2) \qquad \mathrm{v}'(x)=-\frac{1}{x}$
$\mathscr{A}'(\mathrm{x})=1\times\left(2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)+x\times\left(-\frac{1}{x}\right)=2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-1=1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$
$1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow 1\geqslant\ln\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow \mathrm{e}\geqslant\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2\,\mathrm{e}\geqslant x$
$2\,\mathrm{e}=5{,}44$ à 10^{-2} près

x	0	2e	14
$\mathscr{A}'(x)$	|| +	0	−
$\mathscr{A}(x)$	|| ↗	2e	↘

<u>Conclusion</u>
L'aire du rectangle OPMQ est maximale pour le point $\mathrm{M}'(2\mathrm{e}\,;1)$ cette aire maximale est égale à 2.

