Exercice 5 5 points

On souhaite stéleriser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°C$ et on la place dans un four à tempéra-ture constante $T_F = 100\,°C$.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celcius dele boîte au bout de n minutes.
On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

```
Initialisation :      T prend la valeur 25
Traitement :          Demander la valeur de n
                      Pour i allant de 1 à n faire
                          T prend la valeur  0,85×T+15
                      Fin Pour
Sortie :              Afficher T
```

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.

3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B : Modélisation continue

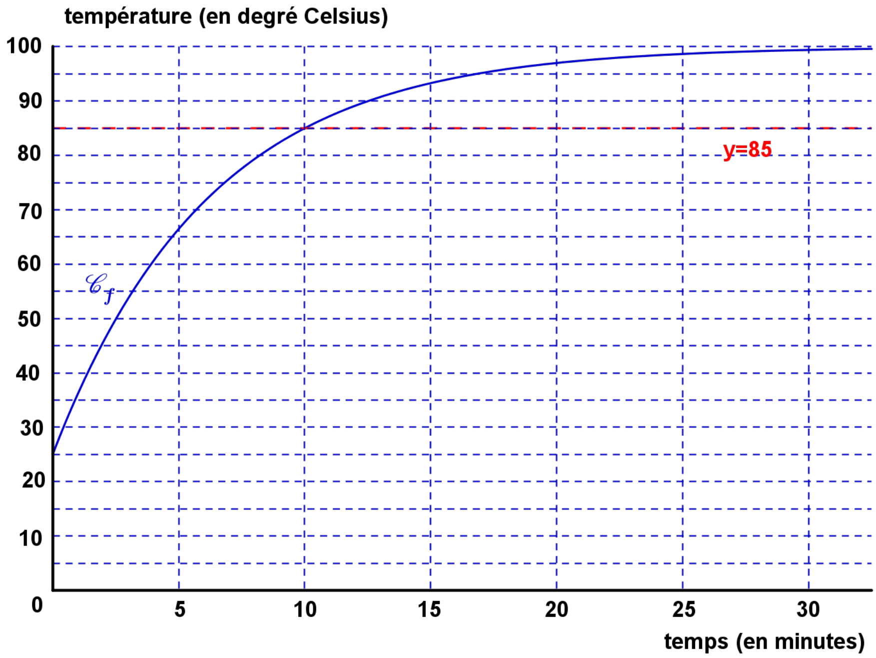
Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par f(t) (exprimée en degré Celcius) avec :

$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$$

1.a. Etudier le sens de variations de f sur $[0;+\infty[$.
b. Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
On note $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire du domaine délimité par les droites t = 10, t = θ, Y = 85 et la courbe représentative de f : $\mathcal{C}_f$.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ si l'aire, exprimée en unité d'aire, $\mathcal{A}(\theta)$ est supétieure à 80.

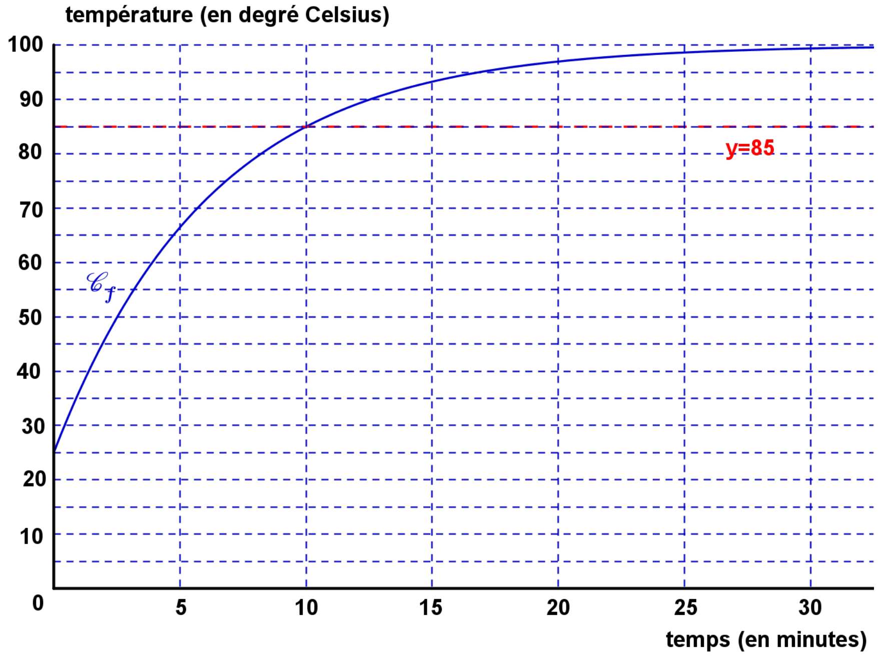


a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $A(\theta)>80$

b. Justifier que, pour $\theta\geq 10$ on a : $A(\theta)=15(\theta-10)-75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

ANNEXE
EXERCICE 5
(à remettre avec la copie)



CORRECTION

Partie A

1. On doit déterminer T_3

$T_1=0,85\,T_0+15=0,85\times25+15=36,25$

$T_2=0,85\times T_1+15=0,85\times36,25+15=45,8125$

$T_3=0,85\,T_2+15=0,85\times45,8125+15=53,940625$

On arrondit à l'unité.

La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est : **54°C.**

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $T_n=100-75\times0,85^n$.

Initialisation

$T_0=25$ et $100-75\times0,85^0=100-75\times1=25$

donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :

$T_n=100-75\times0,85^n$ et on doit démontrer que $T_{n+1}=100-75\times0,85^{n+1}$.

Or pour tout entier naturel n, $T_{n+1}=0,85\times T_n+15$

donc $T_{n+1}=0,85\times(100-75\times0,85^n)+15=85-75\times0,85^{n+1}+15=100-75\times0,85^{n+1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous d'affirmer que pour tout entier naturel n on a :

$T_n=100-75\times0,85^n$

3. La stérilisation de la boîte débute si et seulement si $T_n\geqslant85$.

$T_n\geqslant0,85\Leftrightarrow100-75\times0,85^n\geqslant85\Leftrightarrow100-85\geqslant75\times0,85^n\Leftrightarrow15\geqslant75\times0,85^n$

$\Leftrightarrow\dfrac{15}{75}\geqslant0,85^n\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}\geqslant0,85^n$

ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)\geqslant0,85^n\Leftrightarrow-\ln(5)\geqslant n\times\ln(0,85)$

$0<0,85<1$ donc $\ln(0,85)<0$

$\Leftrightarrow\dfrac{-\ln(5)}{\ln(0,85)}\leqslant n$

En utilisant la calculatrice on obtient :

$\dfrac{-\ln(5)}{\ln(0,85)}=9,90$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc $n\geqslant10$.

La stérilisation débute au bout de **10 minutes.**

Partie B

²Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(t)=100-75e^{-\frac{\ln5}{10}t}$

1.a. f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$(e^u)'=u'e^u$

donc pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ $\left(e^{-\frac{\ln5}{10}t}\right)'=-\dfrac{\ln5}{10}e^{-\frac{\ln5}{10}t}$

et $f'(t)=75\times\dfrac{\ln5}{10}e^{-\frac{\ln5}{10}t}=7,5\times\ln5\,e^{-\frac{\ln5}{10}t}$

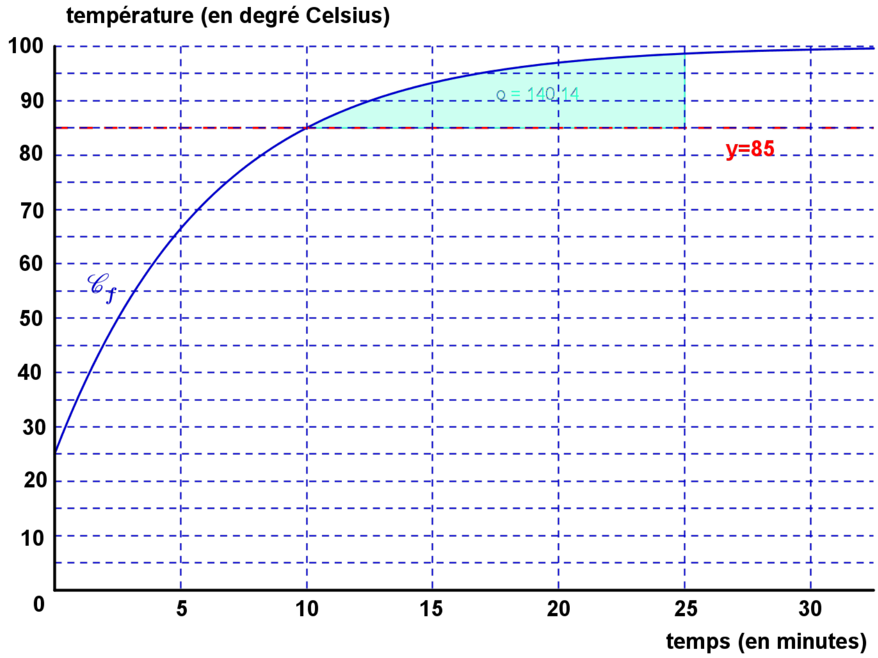
donc $f'(t)>0$ et f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b. f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc si $t\geqslant 10$ alors $f(t)\geqslant f(10)$

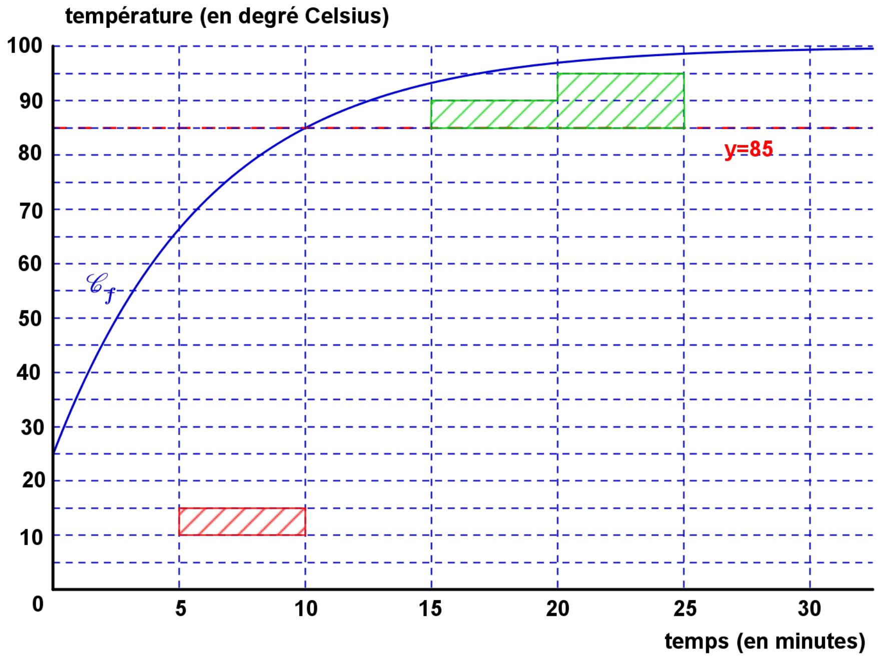
or $f(10)=100-75e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10}=100-75e^{-\ln 5}=100-75e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}=100-75\times\frac{1}{5}=100-15=85$

Conclusion
si $t\geqslant 10$ alors $f(t)\geqslant 85$

2.a. $A(25)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=0$, $x=25$ et $y=85$. Ce domaine est coloré en bleu sur la figure suivante.



Remarque
L'aire d'un rectangle du quadrillage donné (par exemple celui hachuré en rouge) est égale à 25 U.A.



En considérant la figure, on constate que trois rectangles (hachurés en vert) sont contenus dans le domaine donné (d'aire $3\times 25=75$ U.A.) et on estime finalement que l'aire du domaine coloré en bleu est supérieure à 80.

b. θ est un nombre réel supérieur à 10 et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y=85$

donc $A(\theta)=\int_{10}^{\theta}(f(t)-85)\,dt$

$f(t)-85=100-75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}-85=15-75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$

$A(\theta)=\int_{10}^{\theta}15\,dt+75\int_{10}^{\theta}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$

$u(t)=15 \quad U(t)=15t$

U est une primitive de u sur $[0;+\infty[$

$\int_{10}^{\theta}15\,dt=U(\theta)-U(10)=15\theta-150=15(\theta-10)$

donc $A(\theta)=15(\theta-10)-\int_{10}^{\theta}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$

c. Par lecture graphique, on ne peut pas conclure que l'aire du domaine, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=10$, $x=20$ et $y=85$, est supérieure ou inférieure à 80.
Pour répondre à la question il est nécessaire de calculer $A(20)$.

$A(20)=15(20-10)-75\int_{10}^{20}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$

Si a est un nombre réel non nul et $g(t)=e^{at}$ alors la fonction G définie par $G(t)=\frac{1}{a}e^{at}$ est une primitive de g.

$h(t)=e^{-\frac{\ln 5}{10}t} \qquad H(t)=-\frac{10}{\ln 5}e^{\frac{-\ln 5}{10}t}$

$\int_{10}^{20}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt=-\frac{10}{\ln 5}e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 20}+\frac{10}{\ln 5}e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10}=-\frac{10}{\ln 5}e^{\ln\left(\frac{1}{25}\right)}+\frac{10}{\ln 5}e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}=-\frac{10}{\ln 5}\times\frac{1}{25}+\frac{10}{\ln 5}\times\frac{1}{5}$

$\int_{10}^{20}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt=\frac{10}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}\right)=\frac{10}{\ln 5}\times\frac{4}{25}=\frac{8}{5\ln 5}$

$A(20)=150-75\times\frac{8}{5\ln 5}=150-\frac{120}{\ln 5}=75{,}44$ à 10^{-2} près

donc $A(20)<80$

<u>Conclusion</u>

La stérilisation n'est pas terminée au bout de 20 minutes.