Exercice 1 6 points

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines A et B. L'entreprise considère qu'une bille est peut être vendue uniquequement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.
Les parties A, B et C sont indédendantes.
Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :
. 96 % de la production journalière est vendable.
. La machine A fournit 60 % de la production journalière.
. La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.
On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :
A : « la bille est fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille est fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2. Justifier que $P(B\cap V)=0{,}372$ est en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3. Un technitien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie on s'intéresse au diamètre, exprimée en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu=1$ et d'écart-type $\sigma=0{,}055$.
Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisée à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu=1$ et d'écart-type σ' , σ' étant un réel strictement positif.
Sachant que $P(0{,}9\leqslant Y\leqslant 1{,}1)=0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ' .

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu,jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirées par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement les sachets sont composées de 40 billes.

a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif.

CORRECTION

Partie A

L'énoncé précise :

. 96 % de la production journalière est vendable donc $P(V)=0,96$.

. La machine A fournit 60 % de la production journalière donc $P(A)=0,6$.

Conséquence

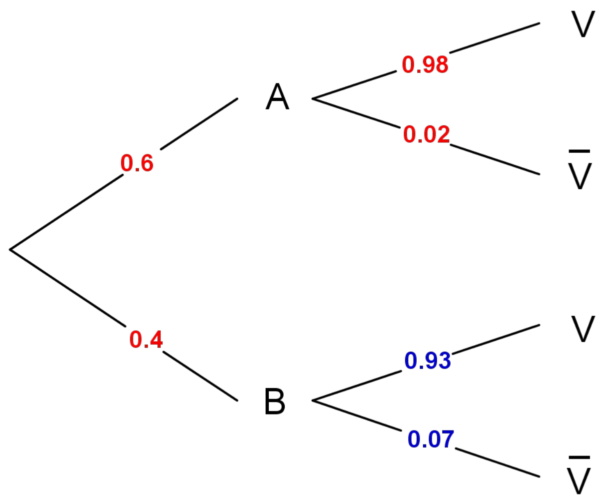
$P(B)=1-P(A)=1-0,6=0,4$.

. La proportion de billes vendables pour la production de la machine A est 98 % donc $P_A(V)=0,98$.

Conséquence

$P_A(\bar{V})=1-P_A(V)=1-0,98=0,02$

On peut construire un arbre pondéré pour décrire la situation (certaines seront calculées dans la suite de l'exercice).



1. On nous demande de calculer $P(A\cap V)$

$P(A\cap V)=P(A)\times P_A(V)=0,6\times 0,98$ = **0,588.**

2. En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré :

$P(V)=P(A\cap V)+P(B\cap V)$

$P(B\cap V)=P(V)-P(A\cap V)=0,96-0,588$ = **0,372.**

3. $P(\bar{V})=1-P(V)=1-0,96=0,04$

$P(B\cap V)=0,372=P(B)\times P_B(V)=0,4\times P_B(V)$

$P_B(V)=\frac{0,372}{0,4}=0,93$ et $P_B(\bar{V})=1-0,93=0,07$

$P(B\cap\bar{V})=P(B)\times P_B(\bar{V})=0,4\times 0,07=0,028$

$P_{\bar{V}}(B)=\frac{0,028}{0,04}=0,7$

donc 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.

Le technicien a raison.

Partie B

1. X suit la loi normale d'espérance $\mu=1$ et d'écart-type $\sigma=0,055$.

En utilisant la calculatrice on obtient : $P(0,9\leqslant X\leqslant 1,1)$ = **0,931.**

c'est à dire 0,93 au centième près.

2. Y suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type σ' et $Z=\frac{Y-1}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée et réduite.

$0,9\leqslant Y\leqslant 1,1 \Leftrightarrow -\frac{0,1}{\sigma'}\leqslant\frac{Y-1}{\sigma'}\leqslant\frac{0,1}{\sigma'}$

On détermine avec la caculatrice le nombre réel a tel que $P(-a\leqslant Z\leqslant a)=0,98$

On obtient $a=2,327$ et $\sigma'=\frac{0,1}{2,327}=0,043$ à 10^{-3} près.

Partie C

La machine teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune et rouge.

Si on tire une bille au hasard la probabilité que cette boule soit noire est : $\frac{1}{5}=0,2$.

1.a. Les sachets sont composés de 40 billes (le remplissage d'un sachet peut être assimilé à un tirage successif de 40 billes avec remise) donc les tirages des 40 billes sont indépendants.
On considère l'épreuve de bernoulli suivante :
On tire au hasard une boule du sachet.
Succès S : « la boule tirée est noire » la probabilité de succès est : $p=P(S)=0,2$.
Echec $\bar{S}$: « la boule tirée n'est pas noire » la probabilité de l'échec : $q=P(\bar{S})=1-0,2=0,8$.
On effectue 40 épreuves indépendantes, donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 40 épreuves est la loi binomiale de paramètres : 40 et 0,2.

On nous demande : $P(X=10)=\binom{40}{10}0,2^{10}\times 0,8^{30}$

La calculatrice nous donne : $P(X=10)=0,1075$ à 10^{-4} près

b. $n=40\geqslant 30$ $\quad np=40\times 0,4=8\geqslant 5$ $\quad nq=40\times 0,8=32\geqslant 5$

On considère l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

$I=\left[0,2-1,96\times\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{40}};0,2+1,96\times\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{40}}\right]$

$1,96\times\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{40}}=0,124$ à 10^{-3} près

$I=[0,076;0,324]$

La proportion trouvée dans l'échantillon est $\frac{12}{40}=0,3$

0,3 appartient à l'intervalle I, donc on ne remet pas en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2. n est le nombre de billes dans un sachet, n est un entier naturel et $n\geqslant 1$.

La probabilité qu'il n'y ait aucune bille noire dans le sachet de n billes est : $0,8^n$.

donc la probabilité qu'il y ait au moins une bille noire dans le sachet est : $1-0,8^n$.

On veut obtenir : sur $1-0,8^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01\geqslant 0,8^n$

La fonction logarithme néperien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant\ln(0,8^n)\Leftrightarrow\ln(0,01)\geqslant n\times\ln(0,8)$

$\ln(0,8)<0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}\leqslant n$

En utilisant la calculatrice on obtient ; $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}=20,64$ à 10^{-2} près.

N est un entier naturel donc **$n\leqslant 21$.**