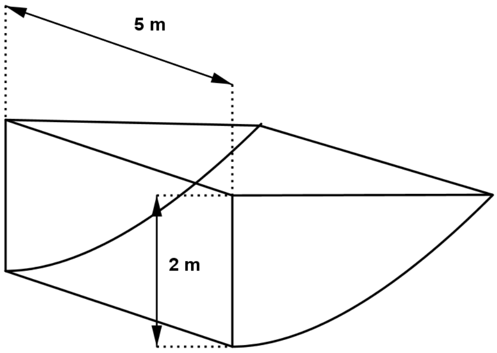
Exercice 2 — 6 points

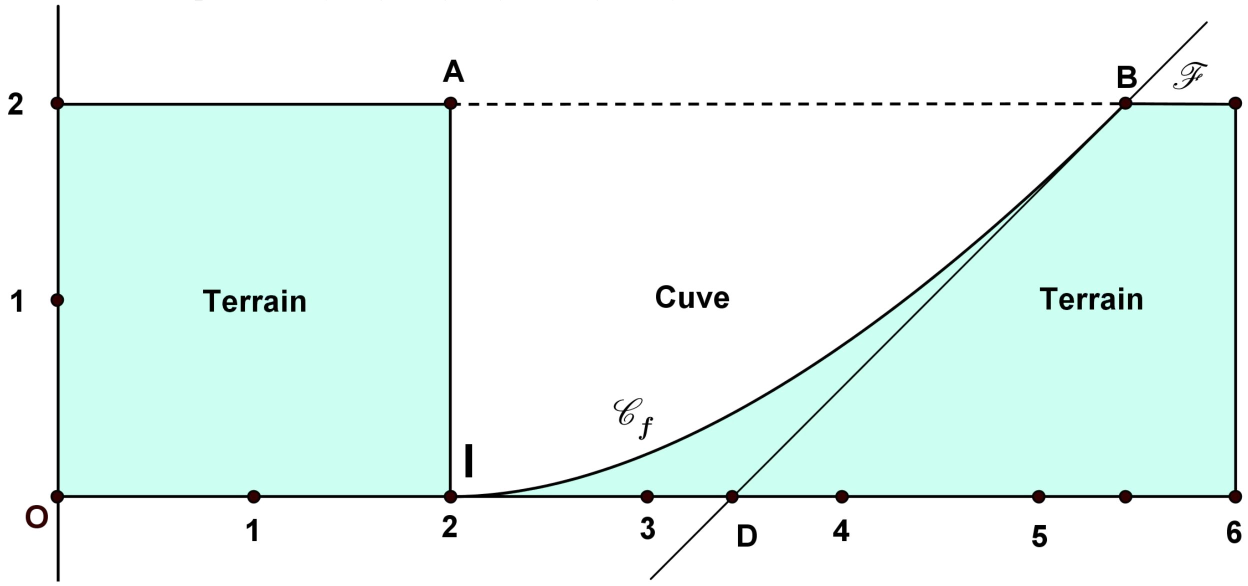
Un paticulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :
- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq métres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-après.



La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle [2;2e] définie par : $f(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x+2$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 m et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points $A(2;2)$, $I(2;0)$ et $B(2e;2)$.



Partie A

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. On note $\mathscr{F}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{F}$ avec l'axe des abscisses.

a. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{F}$ et en déduire les coordonnées de D.

b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites $y=2$, $x=2$ et $x=2e$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

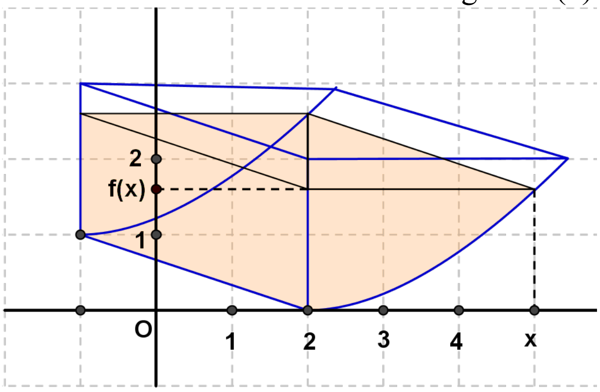
3.a. Montrer que, sur l'intervalle [2;2e], la fonction G définie par : $G(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $[2;2e]$.

c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à f(x).



On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2;2e]$, $v(x)=5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-2x\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+2x-3\right]$.

1. Quel volume d'eau au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v est la fonction définie dans la partie B.
On considère l'algorithme ci-après :

Variables : a est un réel
b est un réel
Traitement : a prend la valeur 2
b prend la valeur $2e$
Tant que $v(b)-v(a)>10^{-3}$ faire
c prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Si $v(c)<\frac{V}{2}$ alors :
a prend la valeur c
Sinon
b prend la valeur c
Fin Si
Fin Tant que
Sortie : Afficher f(c)

Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[2;2e]$, $f(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x+2$

$B(2e;2)$

$f(2e)=2e\times\ln\left(\frac{2e}{2}\right)-2e+2=2e\times\ln(e)-2e+2=2e-2e+2=2$

donc le point B appartient à $\mathscr{C}_f$.

$I(2;0)$

$f(2)=2e\times\ln\left(\frac{2}{2}\right)-2+2=0$

donc I appartient à $\mathscr{C}_f$.

f est dérivable sur $[2;2e]$

Remarque : $\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=\frac{1}{x}$

$f'(x)=1\times\ln\left(\frac{x}{2}\right)+x\times\left(\frac{1}{x}\right)-1=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$f'(2)=\ln\left(\frac{2}{2}\right)=0$

donc l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}_f$ en I.

2.a. $f'(2e)=\ln\left(\frac{2e}{2}\right)=\ln(e)=1$

$\mathscr{F}$: $y-2=1\times(x-2e)$

$\mathscr{F}$: $y=x-2e+2$

D est le point d'intersection de $\mathscr{F}$ et l'axe des abscisses

$x-2e+2=0\Leftrightarrow x=2e-2$

$D(2e-2;0)$

b. L'unité de longueur est le mètre.

$AB=2e-2$ $\quad AI=2$ $\quad ID=2e-2-2=2e-4$

On note $\mathscr{A}_1$ l'aire en m^2 du triangle AIB

$\mathscr{A}_1=\frac{AI\times AB}{2}=\frac{(2e-2)\times 2}{2}=2e-2$.

On note $\mathscr{A}_2$ l'aire en m^2 du trapèze AIBD

$\mathscr{A}_2=\frac{(AB+DI)+AI}{2}=\frac{(2e-2+2e-4)\times 2}{2}=4e-6$

$2e-2<S<4e-6$

On note V le volume en m^3 du réservoir

$V=5\times S$

$10e-10<V<20e-30$

$17{,}183<V<24{,}366$

3.a. G est dérivable sur $[2;2e]$

$G'(x)=\left(\frac{2x}{2}\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\times\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2x}{4}=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

donc G est une primitive de g sur $[2;2e]$.

b. $f(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x+2$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+2x=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{3x^2}{4}+2x$$

F est une primitive de f sur $[2,2e]$.

c. $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite d'équation $y=2$ sur l'intervalle $[2;2e]$ donc

$$S=\int_{2,}^{2e}(2-f(x))\,dx = \int_2^{2e}2\,dx - \int_2^{2e}f(x)\,dx = 2\times 2e-2\times 2-F(2e)+F(2)$$

$S=4e-4-2e^2\ \ln\ (e)+3e^2-4e-3+4=e^2-3$

Le volume V du réservoir est : $V=3S=5e^2-15$

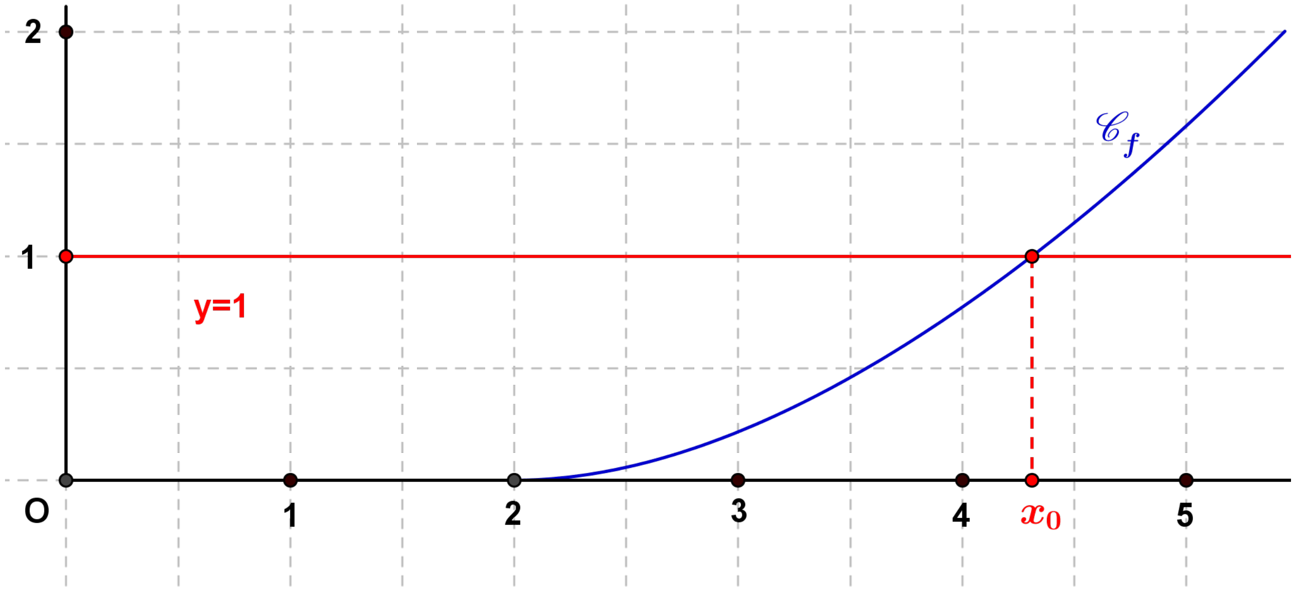
En utilisant la caculatrice on obtient pour valeur approchée au m^3 près du volume $V=22\,m^3$.

Partie B

1. La hauteur d'eau du réservoir est un mètre si et seulement si $f(x)=1$.

Nous avons vu que $f'(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$, pour tout x de l'intervalle $]2;2e]$ $f'(x)>0$

f est continue est strictement croissante sur l'intervalle $[2;2e]$ à valeurs dans l'intervalle $[0;2]$
1 appartient à cet intervalle donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique x_0 appartenant à $[2;2e]$.



Par lecture graphique on obtient pour valeur approchée de x_0 : 4,3.

En utilsant la calculatrice on obtient $x_0=4{,}311$ à 10^{-3} près, et pour valeur approchée au m^3 près du volume correspondant_ $v(x_0)=7\,m^3$.

2. L'algorithme permet d'afficher la hauteur de l'eau dans le réservoir pour un volume à 10^{-3} près égal à la moitié du volume total c'est à dire $\frac{V}{2}$.

Remarque : (résultat non demandé)

En utilisant la calculatrice on obtient : $v(4{,}6612)-v(4{,}611)<10^{-3}$

$x_1=4{,}6611$ et $f(x_1)=1{,}283$ est une valeur approchée de la hauteur de l'eau du réservoir correspondant an volume moitié à $10^{-3}m^3$ près.