Exercice 3 3 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n=(1+i)^n$

1. Ecrire le nombre 1+i sous forme exponentielle.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$ le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

CORRECTION

1. $|1+\mathrm{i}|^2=1^2+1^2=2$ donc $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$

$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

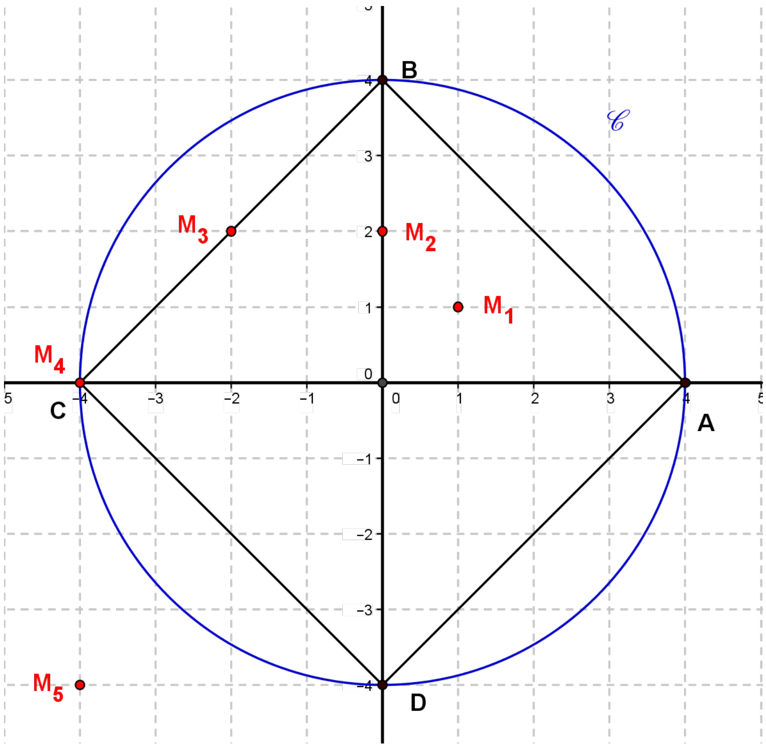
$\arg(1+\mathrm{i})=\varphi+2k\pi$

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$

On peut choisir : $\varphi=\frac{\pi}{4}$

$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2. On construit le carré ABCD et son cercle circonscrit $\mathscr{C}$



Pour tout entier naturel n on a : $OM_n=|z_n|$

Si $|z_n|>4$ le point M_n n'appartient au disque fermé de centre O et de rayon donc M_n est extérieur au carré ABCD.

Or $z_n=(\mathrm{i}+\mathrm{i})^n=z_1{}^n$ donc $|z_n|=|z_1|^n=(\sqrt{2})^n$

$|z_1|=\sqrt{2}$ $|z_2|=(\sqrt{2})^2=2$ $|z_3|=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$ $|z_4|=(\sqrt{2})^4=4$ $|z_5|=(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}>4$

La suite $((\sqrt{2})^n)$ est croissante donc pour tout entier naturel $n\geqslant 5$ $|z_n|>4$ et M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

On sait que les quatre premiers sont à l'intérieur du disque fermé de centre O et de rayon 4 mais on ne sait pas si les points sont aussi à l'intérieur du carré ABCD.

Pour conclure on place ces quatre points, ici on utilise la forme algébrique des affixes.

$z_1=1+\mathrm{i}$ $z_2=(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}-1=2\mathrm{i}$ $z_3=(1+\mathrm{i})^3=2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=-2+2\mathrm{i}$

$z_4=(1+\mathrm{i})^4=(-2+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=-2+2\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2=-4$

M_1, M_2, M_3 et M_4 sont à l' intérieur au carré ABCD.

<u>Conclusion</u>

Le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier n vérifiant $n\geqslant n_0$ et M_n extérieur au carré ABCD. Est égal à 5.