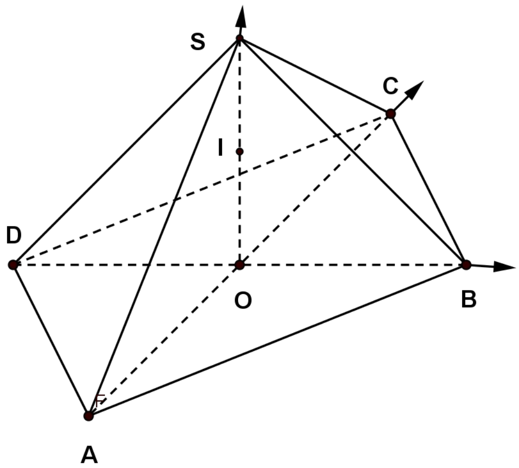
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangle équilatérauxreprésentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.
Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu de [SO].

a. Déterminer les coordonnées du point K.
b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.
c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right)$.

a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
b. Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.
c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

CORRECTION

1. ABCD est un carré de centre O donc le triangle OBC est rectangle isocèle en O.
Or OB = 1 donc OC = 1, en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle OBC
$OB^2+OC^2=BC^2$; $1^2+1^2=BC^2$ soit $BC^2=2$ et $BC=\sqrt{2}$.
La pyramide SABCD est régulière donc $SA=SB=SC=SD=AB=BC=CD=DA=\sqrt{2}$.
[SO] est la hauteur de la pyramide donc le triangle SOB est rectangle en O.
En utilisant le théorème de pythagore dans le triangle SOB : $SO^2+OB^2=SB^2$
Or OB = 1 et $SB=\sqrt{2}$, $SO^2+1^2=(\sqrt{2})^2=2 \Leftrightarrow SO^2=2-1=1$ donc SO = 1.
<u>Conséquence</u>
$OB=OC=OS=1$ et on a les vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont orthogonaux deux à deux.
Le repère $(0;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS})$ est un repère orthonormé.

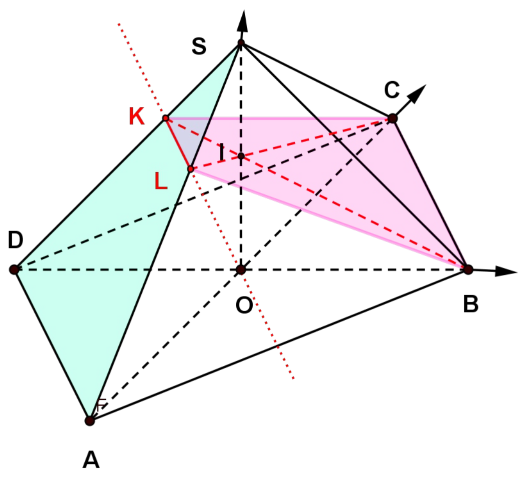
2. Dans le repère $(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS})$
$O(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(0;1;0)$; $D(-1;0;0)$; $A(0;-1;0)$; $S(0;0;1)$; $I(0;0;0{,}5)$

a. $\overrightarrow{SD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $K(x;y;z)$ $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}\\ y=\ 0\\ z-1=-\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}\\ y=\ 0\\ z=\ \frac{2}{3}\end{cases} \quad K\left(-\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$$

b. $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\0{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires donc les points B ; K et I sont alignés.



c. Dans le plan (ACS), les droites (CI) et (SA) sont sécantes, on note L le point d'intersection donc L appartient à (SA) et à (CI) donc au plan (BCI) et L est le point d'intersection de (SA) et (BCI).
Les plans (BCI) et (SAD) sont sécants, la droite d'intersection est **(LK).**
Le plan (BCI) contient la droite (BC) et le plan (SAD) contient la droite (AD) et les droites (BC) et (AD) sont parallèles, le théorème du **TOIT** nous permet d'affirmer que la droite (LK) est parallèle à (AD).

d. Dans le triangle BAD, les segments [LK] et [AD] sont parallèles, le théorème de Thalès nous permet d'affirmer que : $\frac{SK}{SD}=\frac{SL}{SA}=\frac{1}{3}$ donc $SL=\frac{1}{3}SA$

Les points S ; L et A sont alignés dans cet ordre donc $\vec{SL}=\frac{1}{3}\vec{SA}$.

$\vec{SA}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad L(x;y;z)$ $\quad \vec{SL}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$$\vec{SL}\frac{1}{3}\vec{SA} \Leftrightarrow \begin{cases} x= 0\\ y=-\frac{1}{3}\\ z-1= -\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x= 0\\ y=-\frac{1}{3}\\ z= \frac{2}{3}\end{cases} \quad L\left(0;-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$$

3.a. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCI), par exemples les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{CI}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\0,5\end{pmatrix}$ $\quad \vec{CI}\begin{pmatrix}0\\-1\\0,5\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\vec{BI}=1\times(-1)+1\times0+2\times0,5=-1+1=0$

$\vec{n}.\vec{CI}=1\times0+1\times(-1)+2\times0,5=-1+1=0$

<u>Conclusion</u>

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b. $\vec{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

On remarque que : $\vec{n}=\vec{AS}+\vec{DS}$, donc les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{AS}$ et $\vec{DS}$ sont coplanaires.

c. $\vec{n}$ est un vecteur du plan (SAD) et normal au plan (BCI) donc les plans (SAD) et (BCI) sont perpendiculaires.