Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la manière suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules que contient l'urne U à la fin du $n^{\text{ième}}$ tirage.

1.a. Traduire par une phase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$; $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$; $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$.

b. Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par
$R_n=\begin{pmatrix}P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2)\end{pmatrix}$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$
Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.

3. On admet que $M=P\times D\times P^{-1}$ avec :

$P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Etablir que, pour out entier naturel n, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n=\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

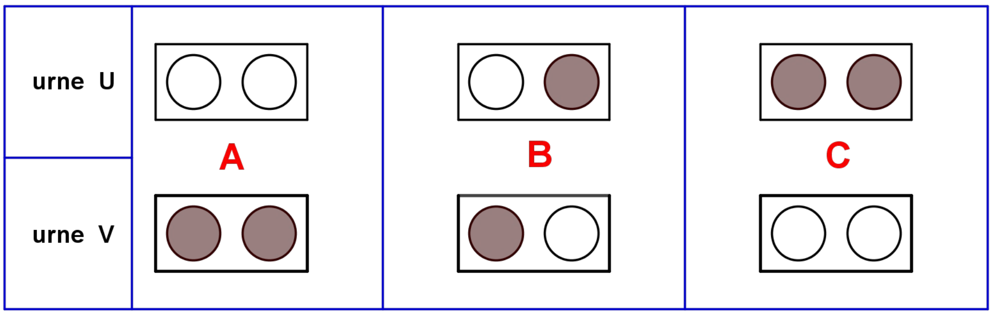
4.a. Calculer $D^n\times P^{-1}$ en fonction de n.

b. Sachant que $R_0P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)$.
Interpréter ces résultats.

CORRECTION

Il y a quatre boules, 2 blanches et 2 noires qui sont réparties selon les tirages de 3 manières différentes : A, B et C.
A : U contient 2 blanches et V contient 2 noires
B : U et V contiennent 1 blanche et 1 noire
C : U contient 2 noires et V contient 2 blanches



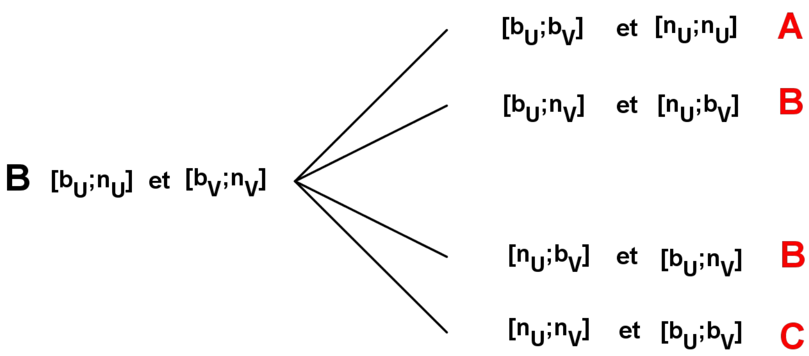
1.a. $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité qu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ il y ait une boule blanche et une seul dans l'urne U sachant qu'au $n^{\text{ième}}$ tirage il y avait une boule blanche et une seule dans l'urne U.

- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$

L'événement $(X_n=0)$ est l'événement C
On tire une boule noire de l'urne U que l'on place dans l'urne V et on tire une boule blanche dans l'urne V que l'on place dans l'urne U.
On obtient l'événement B.
Sachant qu'il y a 0 boule blanche dans U après le tirage il ya une boule blanche et une seule dans l'une U.
<u>Conséquence</u>
$P_{(X_n=0)}(X_{n+1=1}) = \mathbf{1}$.

- $P_{(X\,n=1)}(X_{n+1}=1)$

L'événement $(X_n=1)$ est l'événement B
On note les boules de U : b_U et n_U et on note les boules de V : b_V et n_V.



Les tirages s'effectuent au hasard et de manière simultanée donc

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{4}$$

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}$$

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{4}$$

- $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$

  L'événement $(X_n=2)$ est l'événement A

  On tire une boule blanche dans l'urne U Que l'on place dans l'urne V et on tire une boule noire dans l'urne U.

  On obtient l'événement B.

  Sachant qu'il y a 2 boules blanches dans U alors après le tirage il y a nécessairement une boule blanche et une seule dans l'urneU.

  <u>Conséquence</u>

  $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$

b. Les événements $(X_n=0)$; $(X_n=1)$ et $(X_n=2)$ constituent une partition de l'univers.

En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

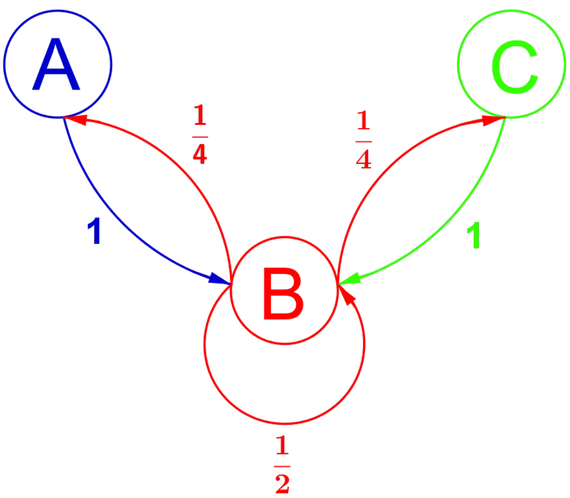
$$P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)\times P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=1)\times P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)\times P_{(X_n=2)}\times P_{(X_n=2)}(X_{n+1})$$

$$P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)\times 1+P(X_n=2)\times\frac{1}{2}+P(X_n=2)\times 1$$

2. Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.

<u>Remarque :</u>

On peut considérer l'arbre probabiliste suivant **(non demandé)**



$$R_n=\begin{pmatrix}P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2)\end{pmatrix} \qquad R_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

M est la matrice associée au graphe probabiliste précédent.

On admet que pour tout entier naturel n : $R_{n+1}=R_n\times M$.

$$R_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Pour n=0 on convient que $M^2=I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ donc $R_0\times M^0=R_0\times I=R_0$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $R_n=R_0\times M^n$.

Initialisation

Pour n=1 nous avons $R_1=R_0\times M=R_0\times M^1$, la propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $R_n=R_0\times M^n$ et on doit démontrer que $R_{n+1}=R_0\times M^{n+1}$

Or $R_{n+1}=R_n\times M=R_0\times M^n\times M=R_0\times M^{n+1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n on a : $R_n=R_0\times M^n$

Remarque

Nous avons vu le cas n=0, donc la propriété précédente est vérifiée pour tout entier naturel n.

3. On admet que $M=P\times D\times P^{-1}$ avec

$$P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Pour n=0 $M^n=D^n=I$ $P\times P^{-1}=1$ donc la propriété est vérifiée pour n=0.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement récurrence que pour tout entier naturel n non nul que : $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$

Initialisation

Pour n=1 nous avons $M^1=M=P\times D\times P^{-1}=P\times D^1\times P^{-1}$, la propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour Démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$ et on doit démontrer que $M^{n+1}=P\times D^{n+1}\times P^{-1}$

Or $M^{n+1}=M^n\times M=(P\times D^n\times P^{-1})\times(P\times D\times P^{-1})=P\times D^n\times(P^{-1}\times P)\times D\times P^{-1}$

$M^{n+1}=P\times D^n\times I\times D\times P^{-1}=P\times(D^n\times D)\times P^{-1}=P\times D^{n+1}\times P^{-1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n on a : $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$

Remarque

Nous avons vu le cas n=0, donc la propriété précédente est vérifiée pour tout entier naturel n.

On admettra que pour tout entier naturel n, $D^n=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4.a. $D^n\times P^{-1}=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

b. $R_0P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ donc

$$R_0\times P\times D^n\times P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{6} & -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$