Exercice 1 5 points

Un maraîcher est spécialisé dans la production des fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production des fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

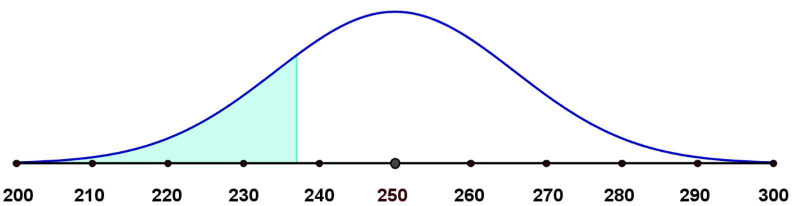
Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A. et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88, dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation donne un fruit est égale à 0,862.
Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut-être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart-type σ .
La représentation graphique de la fonction de densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après.



1. On donne $P(X\leqslant 237)=0,14$. Calculer la probabilité de l'événement « lamasse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y=\dfrac{X-250}{\sigma}$

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

b. Démontrer que $P\left(Y\leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right)=0,14$

c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entierss.

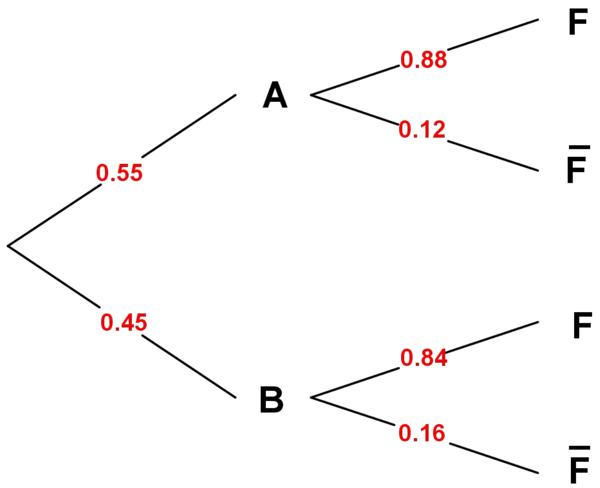
a. Une barquette est conforme,si sa masse exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle [250-n;250+n]. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle [230;m]. Déterminer la plus petite valeur de m pour que la barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

CORRECTION

Partie A : production de fraises

On note :
A : « la fleur de fraisier choisie au hasard est située dans la serre A »
B : « la fleur de fraisier choisie au hasard est située dans la serre B »
F : « la fleur de fraisier choisie au hasard donne un fruit »
$\bar{F}$: « la fleur de fraisier choisie au hasard ne donne pas de fruit »
L'énoncé précise :
« 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A et 45 % dans la serre B »
« Dans la serre A la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est 0,88 et dans la serre B elle est égale à 0,84 »
Conséquences
$P(A)=0,55 \qquad P(B)=P(\bar{A})=0,45$
$P_A(F)=0,88 \qquad P_A(\bar{F})=1-0,88=0,12$
$P_B(F)=0,84 \qquad P_B(\bar{F})=1-0,84=0,16$
On construit l'arbre pondéré



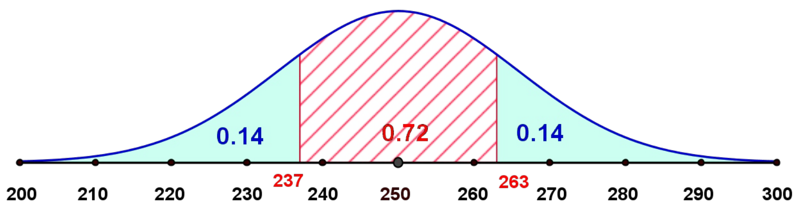
Proposition 1 : $\boxed{\textbf{VRAIE}}$
Justifications :
En utilisant l'arbre podéré ou la formule des probabilités totales
$P(F)=P(A\cap F)+P(B\cap F)=P(A)\times P_A(F)+P(B)\times P_B(F)=0,55\times 0,88+0,45\times 0,84=0,484+0,378 = \mathbf{0,862}$**.**

Proposition 2 : $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$
Justifications :
On considère $P_F(A)$
$P_F(A)=\dfrac{P(A\cap F)}{P(F)}=\dfrac{0,484}{0,862}=0,561$ à 10^{-3} près
$0,561\neq 0,439$

Partie B

1. X suit la loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart-type σ donc :
$P(X<+237)=P(X\leqslant 250-13)=P(250+13\leqslant X)=P(263\leqslant X)=0,14$
et $P(237\leqslant X\leqslant 263)=1-2\times 0,14=0,72$

On joint la représentation graphique de la fonction de répartition



2.a. $Y=\dfrac{X-250}{\sigma}=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ donc Y suit la loi normale centée est réduite.

b. $(X\leqslant 237)\Leftrightarrow\left(\dfrac{X-250}{\sigma}\leqslant-\dfrac{13}{\sigma}\right)\Leftrightarrow\left(Y\leqslant-\dfrac{13}{\sigma}\right)$

$P(X\leqslant 237)=0{,}14=P\left(Y\leqslant-\dfrac{13}{\sigma}\right)$

En utilisant la calculatrice pour la loi normale centrée et réduite, on obtient :

$P(Y\leqslant-1{,}08)=0{,}14$

donc $-1{,}08=-\dfrac{13}{\sigma}$

$\sigma=\dfrac{13}{10{,}08}=12$ à l'entier près

3.a. Une barquette est conforme si sa masse ,exprimée en gramme, appartient à l'intervalle [250-n;250+n] avec n un entier naturel.

On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(250-n\leqslant X\leqslant 250+n)\geqslant 0{,}95$.

Le cours nous donne le résultat suivant : si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ alors $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}95$.

Pour l'exemple : $P(250-2\times 12\leqslant X\leqslant 250+2\times 12)=P(250-24\leqslant X\leqslant 250+24)=0{,}95$

Si h et k sont des entiers naturels tels que $h<24<k$ par une considération graphique on peut affirmer que $P(250-h\leqslant X\leqslant 250+h)<P(250-24\leqslant X\leqslant 250+24)\leqslant P(250+k\leqslant X\leqslant 250+k)$

donc **24** est le plus petit entier naturel n vérifiant $P(250-n\leqslant X\leqslant 250+n)\geqslant 0{,}95$

b. Une barquette est conforme si sa masse , exprimée en gramme, appartient à l'intervalle [230;m].

On veut déterminer le plus petit entier naturel m tel que $P(230\leqslant X\leqslant m)\geqslant 0{,}95$.

En utilisant la calculatrice on obtient :

$P(230\leqslant X\leqslant 284)=0{,}9499$

$P(230\leqslant X\leqslant 285)=0{,}9504$

donc le plus petit entier naturel m tel que $P(230\leqslant X\leqslant m)\geqslant 0{,}95$ est **m=285.**