Exercice 3 7 points

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1kg de bactéries. Ensuite chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30kg de bactéries.
Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : $u_0=1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}2u_n-100$.

1.a. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n .
b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse bactéries dépassera 30kg. A l'aide de la calculatrice,donner une réponse à ce problème.
c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme

```
Variables :      u et n sont des nombres
Traitement :     u prend la valeur 1000
                 n prend la valeur 0
                 Tant que …............. faire
                     u prend la valeur ….......
                     n prend la valeur n+1
                 Fin Tant que
Sortie :         Afficher …..........
```

2.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.
b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour toutentier naturel n, $v_n=u_n-500$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b. Exprimer v_n puis u_n
c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : second modèle - avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=\dfrac{50}{1+49e^{-0,2t}}$ où t représente le temps exprimé en jours et où f(t) représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1.a. Calculer f(0).
b. Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t)<50$.
c. Etudier le sens de variation de la fonction f.

d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexe.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t)\geqslant 30$.
En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.
L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont du type A.
Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon de 200 bactéries en fin de production.
L'analyse montre que 146 d'entre elles sont du type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

CORRECTION

PARTIE A : premier modèle – avec suite

$u_0=1000$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1,2u_n-100$

1.a. u_n est la masse, exprimée en grammes, de bactéres le $n^{ième}$ jour.

$u_0=1000$ (on introduit initialement 1kg de bactéries).

La masse de bactéries le $(n+1)^{ième}$ jour est égale à $u_n+0,2u_n-100$ (la masse des bactéries augmente de 20 % sur un jour mais on perd 100g de bactéries lorsque l'on remplace le milieu nutritif).

$u_{n+1}=u_n+0,2u_n-100=1,2u_n-100$

b. Avec la calculatrice, on ouvre un compteur et on programme la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=1,2x-100$.

On obtient :

$u_1=1100$ ……. $u_{10}=3596$ (arrondi à l'unité) …….. $u_{15}=8204$ …….. $u_{20}=19668$ ……. $u_{21}=23503$

$u_{22}=$ **28104** $u_{23}=$ **33624**

Conclusion

Au bout de 23 jours la masse des bactéries dépassera les 30kg.

c. Algorithme

Variables : u et n sont des nombres

Traitement : u prend la valeur 1000

n prend la valeur 0

Tant que **u < 30000** faire

u prend la valeur **1,2u-100**

n prend la valeur n+1

Fin Tant que

Sotie : Afficher **n**

2.a. On veut démontrer en utilisant par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 1000$

Initialisation

$u_0=1000$ donc $u_0\geqslant 1000$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant 1000$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant 1000$.

Or $u_{n+1}=1,2u_n-100$

Si $u_n\geqslant 1000$ alors $1,2u_n-100\geqslant 1,2\times 1000-100=1100\geqslant 1000$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_n\geqslant 1000$

b. Pour tout entiernaturel n :

$u_{n+1}-u_n=1,2u_n-100-u_n=0,2u_n-100\geqslant 0,2\times 1000-100=100>0$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Pour tout entier naturel n

$v_n=u_n-500$ donc $u_n=v_n+500$

a. $v_{n+1}=u_{n+1}-500=1,2u_n-100-500=1,2(v_n+500)-600=1,2v_n+600-600=1,2v_n$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=u_0-500=1000-500=500$ et de raison 1,2.

b. Pour tout entier naturel n

$v_n=v_0\times q^n=500\times 1,2^n$

$u_n=u_n+500=500\times 1,2^n+500$

c. 1,2 >1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Partie B : second modèle – avec une fonction

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f(t)=\dfrac{50}{1+49e^{-0,2t}}$.

1.a. $f(0)=\dfrac{50}{1+49e^{0}}=\dfrac{50}{1+49}=1$

b. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$

$$50-f(t)=50-\frac{50}{1+49e^{-0,2t}}=\frac{50+50\times 49e^{-0,2t}-50}{1+49e^{-0,2t}}=\frac{50\times 49e^{-0,2t}}{1+49e^{-0,2t}}>0$$

Conclusion

$f(t)<50$

c . f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$(e^{u})'=u'e^{u}$ donc $(e^{-0,2t})'=-0,2e^{-0,2t}$

$$f'(t)=-\frac{50\times(-0,2\times 49)e^{-0,2t}}{(1+49e^{-0,2t})^2}>0$$

f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

d. $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,2t = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^{T}=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\dfrac{50}{1+0}=$ **50.**

2. $f(0)=1$ la masse initiale de bactéries sera toujours inférieure à 50

. $f(t)<50$ la masse de bactéries sera toujours inférieure à 50.

. f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ la masse de bactéries augmente tous les jours

. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=50$ dans un avenir lointain la masse de bactéries sera voisine de 50.

3. $f(t)\geqslant 30 \Leftrightarrow \dfrac{50}{1+49e^{-0,2t}}\geqslant 30 \Leftrightarrow 50\geqslant 30(1+49e^{-0,2t})\Leftrightarrow \dfrac{20}{30\times 49}\geqslant e^{-0,2t}\Leftrightarrow \dfrac{2}{147}\geqslant e^{-0,2t}$

la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{2}{147}\right)\geqslant -0,2t$

on a $-0,2<0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{147}\right)}{0,2}\leqslant t$

En utilisant la calculatrice

On obtient $21,48 \leqslant t$

Conclusion

La masse de bactéries est strictement supérieure à 30kg au bout de **22jours.**

Partie C : un contrôle de qualité

La proportion de bactéries de type A affirmée par l'entreprise est : p= 0,8.

La taille de l'échantillon choisi est $n=200\geqslant 30$, $np=200\times 0,8=160\geqslant 5$, $n(1-p)=200\times 0,2=40\geqslant 5$

On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique qu seuil de 95 %.

$$I=\left[0,8-1,96\times\sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{200}};0,8+1,96\times\sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{200}}\right]$$

En utilisant la calculatrice, on obtient I=[0,74;0,86].

La proportion obtenue dans l'échantillon est $\dfrac{146}{200}=0,73$. 0,73 n'appartient pas à l'intervalle I.

L'affirmation de l'entreprise est remise en cause avec un risque d'erreue de 5 %.