Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée, une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production. On admet que la variable aléatoire exprimant sa masse , en grammes, suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.
Affirmation 1
La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187g est supérieure à 0,9.

2. Affirmation 2
L'équation $x-\cos(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Dans les questions 3 et 4, l'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x=-5t'+3 \\ y=2t' \\ z=t'+4 \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

3. Affirmation 3
Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

4. Affirmation 4
La droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle au plan d'équation $x+2y+z-3=0$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Justifications

On note M la variable aléatoire égale à la masse, en grammes, de la baguette choisie au hasard.
M suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(187 \leqslant M)$ = **0,9032 > 0,9.**
Donc l'affirmation 1 est vraie.

2. Affirmation 2 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

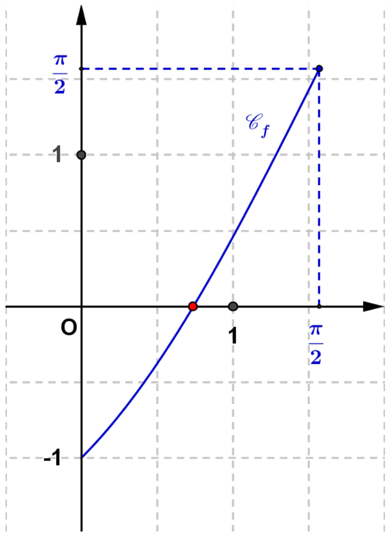
Justifications

On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=x-\cos(x)$.

f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=1+\sin(x)>0$, donc f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f(0)=-1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $-1<0<\frac{\pi}{2}$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ c'est à dire que l'équation $x-\cos(x)=0$ admet une et une seule solution α appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque

On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère.



α est l'abscisse de l'unique point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $\alpha=0{,}74$ à 10^{-2} Près.

3. Affirmation 3 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Justifications

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes si et seulement si le système suivant de 3 équations à 2 inconnues admet un couple solution unique :

$$\begin{cases} 1+2t=-5t'+3 \\ 2-3t=2t' \\ 4t=t'+4 \end{cases}$$

De la troisième équation on obtient $t'=4t-4$
Dans la première équation $2t+5(4t-4)=2 \Leftrightarrow 22t=22 \Leftrightarrow t=1$

Dans la deuxième équation $-3t-2(4t-4)=2 \Leftrightarrow -11t=-10 \Leftrightarrow t=\frac{10}{11}$

Donc le système n'admet pas de solution et les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas sécantes.
L'affirmation 3 est fausse.

4. Affirmation 4 : $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

<u>*Justifications*</u>

$\vec{V}_1\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$, $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan d'équation $x+2y+z-3=0$.

$\mathscr{D}_1$ est parallèle au plan d'équation $x+2y+z-3=0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Or $\vec{V}_1.\vec{n}=2\times1+(-3)\times2+4\times1=2-6+4=0$.

L'affirmation 4 est vraie.