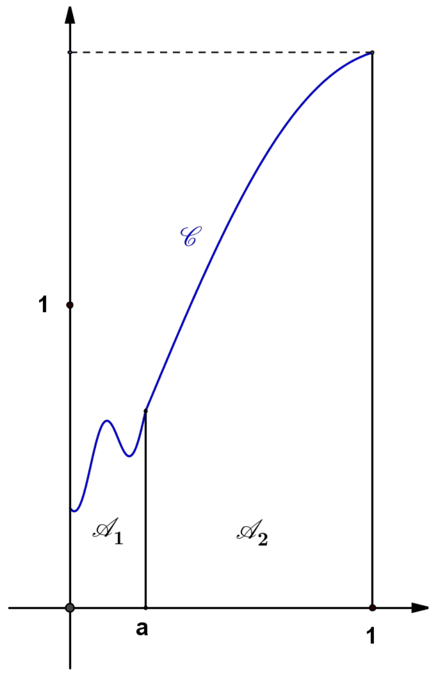
Exercice 2 — 6 points

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0;1], continue et positive sur cet intervalle, et a un nombre réel tel que $0 < a < 1$;
On note :
. $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.
. $\mathscr{A}_1$ l'aire (en unité d'aire) du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x=0$ et $x=a$ d'autre part.
. $\mathscr{A}_2$ l'aire (en unité d'aire) du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x=a$ et $x=1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « Les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».
On admet l'existence d'un réel a pour chacune des fonctions considées.

Partie : Etude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
a. f est une fonction constante strictement positive.
b. f est définie sur [0;1] par $f(x)=x$

2.a. A l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aire, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.
b. On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0;1]
Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a)=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$.
La réciproque est-elle vraie ?

3. Dans cette question on envisage deux autres fonctions particulières.
a. La fonction f est définie pour tout réel x de [0;1] par $f(x)=e^x$.
Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.
b. La fonction f définie pour tout réel x de [0;1] par $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$

Vérifier que la valeur $a=\frac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a.

Dans cette partie, on considère la fonctionf définie pour tout réel x de [0;1] par $f(x)=4-3x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle [0;1], on note a cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de [0;1] par $g(x)=x^3+\frac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=g(u_n)$.

a. Calculer u_1

b. Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle [0;1].

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

d. Prouver que la suite (u_n) est convergente.

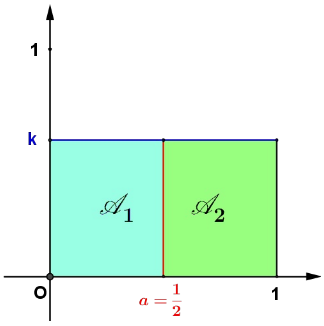
A l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

e. On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0<a-u_{10}<10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

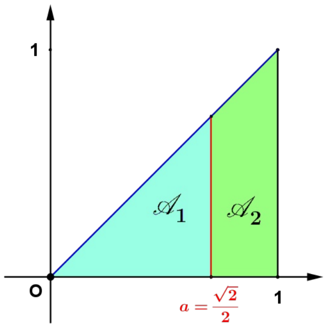
CORRECTION

Partie A : Etude de quelques exemples

1.a. k est un nombre réel strictement positif.
f est définie pour tout nombre réel de l'intervalle [0;1] par : $f(x)=k$.
$0<a<1$ (On calcule les aires de deux rectangles)
$\mathscr{A}_1 = k\times a$ et $\mathscr{A}_2 = k\times(1-a)$
$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow k\times a=k\times(1-a)\Leftrightarrow k\times(a-1+a)=0\Leftrightarrow k\times(2a-1)=0$
Or $k\neq 0$ donc $2a-1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$



b. f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] par : $f(x)=x$
$0<a<1$ (on calcule les aires de deux triangles rectangles isocèles)
$\mathscr{A}_1 = \frac{a\times a}{2}=\frac{a^2}{2}$
L'aire du grand triangle $\mathscr{A} = \frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$
$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}$
$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow 2a^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$



2.a. f est continue et positive sur [0;1].
$0<a<1$
$\mathscr{A}_1 = \int_0^a f(x)\,dx$ et $\mathscr{A}_2 = \int_a^1 f(x)\,dx$

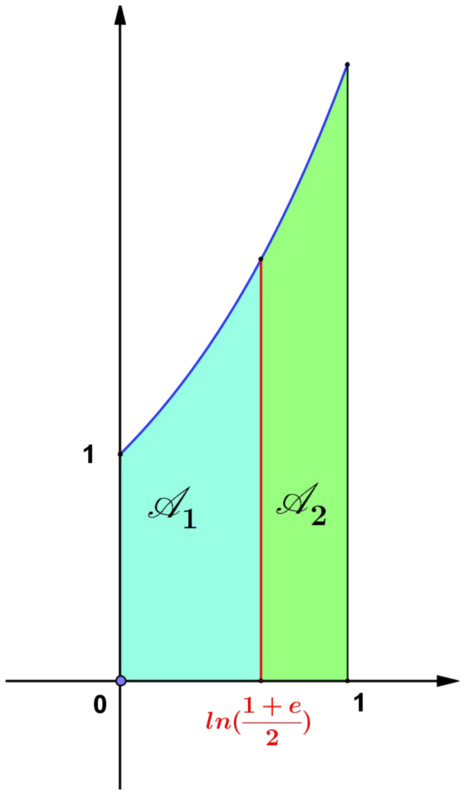
b. F est une primitive de f sur [0;1] donc : $\mathscr{A}_1 = F(a)-F(0)$ et $\mathscr{A}_2 = F(1)-F(a)$
$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow F(a)-F(0)=F(1)-F(a)\Leftrightarrow 2F(a)=F(0)+F(1)\Leftrightarrow F(a)=\frac{F(0)+F(1)}{2}$
(On travaille par équivalence donc la réciproque est vraie).

3.a. f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] par $f(x)=e^x>0$

Une primitive de f sur [0;1] est F telle que $F(x)=e^x$

a satisfait la condition (E) si et seulement si $e^a=\frac{e^0+e^1}{2}$

$\Leftrightarrow e^a=\frac{1+e}{2} \Leftrightarrow a=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

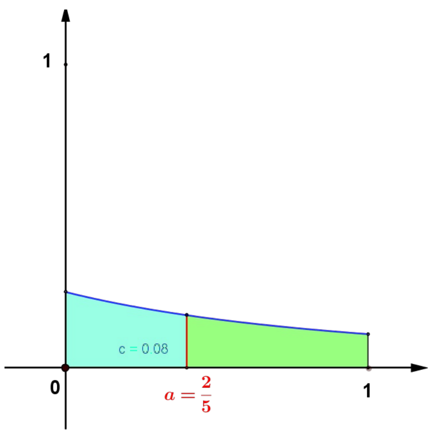


b. f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] par $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}>0$

Une primitive de f sur [0:1] est F telle que $F(x)=\frac{-1}{x+2}$

a satisfait la condition (E) si et seulement si $\frac{-1}{a+2}=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{-\frac{5}{6}}{2}=-\frac{5}{12}$

$\Leftrightarrow a+2=\frac{12}{5} \Leftrightarrow a=\frac{12}{5}-2=\frac{2}{5}$



Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

f esr définie pour tout nombre réel de l'intervalle [0;1] par : $f(x)=4-3x^2$

1. Une primitive de f sur [0;1] est la fonction F telle que $F(x)=4x-x^3$

a satisfait à la condition (E) si et seulement si $4a-a^3=\frac{4-1+0}{2}=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 4a=a^3+\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=\frac{a^3}{4}+\frac{3}{8}$

Conclusion

Si a satisfait à la condition (E) alors a est solution de l'équation $x=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$.

(On admet que cette équation admet une unique solution dans l'intervalle [0;1] que l'on note a.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] $g(x)=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$.

(u_n) est la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=g(u_n)$

a. $u_1=g(u_0)=g(0)=\frac{3}{8}$

b. g est dérivable sur [0;1]

$g'(x)=\frac{3x^2}{4}\geqslant 0$ donc g est croissante sur [0;1].

c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Initialisation

Pour $n=0$: $u_0=0$ et $u_1=\frac{3}{8}$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ et on doit démontrer que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$.

Or g est croissante sur [0;1] donc si $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ alors $g(0)\leqslant g(u_n)\leqslant g(u_{n+1})\leqslant g(1)$

soit $\frac{3}{8}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{5}{8}$ conséquence : $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

d. Pour tout entier naturel n, on a $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante d'autre part (u_n) est majorée par 1 et la suite (u_n) est convergente, on note $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$ et $0\leqslant l\leqslant 1$.

Or g est une fonction continue sur [0;1] et $\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(l)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$

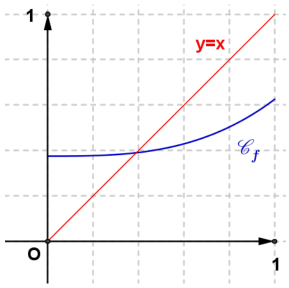
donc $g(l)=l$ et l est une solution de l'équation $x=g(x)\Leftrightarrow x=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$ or l'unique solution de cette équation appartenant à [0;1] est a.

Conclusion

$l=a$

Remarque

a est l'abscisse de point dintersection de la courbe représentative de g sur [0;1] et de la droite d'équation $y=x$.



e. En utilisant la calculatrice on obtient $u_{10}=0{,}38980784$ à 10^{-8} près