Exercice 3 5 points

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manièr indépendante.

PartieA : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage.

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. Linstitut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire ? Justifier la réponse.

b. Quelle est la meilleure approximation de $P(X\geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

0,92 0,93 0,94 0,95

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses.

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne favorable peut :

. soit être en réalité faforable au projet si elle est sincère.
. Soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste, on prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

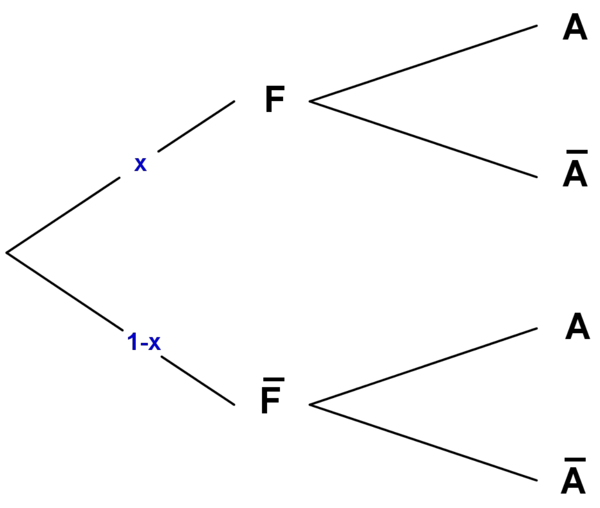
. F l'événement « la personne est en réalité favorable au projet »
. $\overline{F}$ l'événement « la personne est en réalité défavorable au projet »
. A l'événement « la personne affirme qu'elle favorable au projet »
. $\overline{A}$ l'événement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données on a $P(A)=0{,}29$

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$

a. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous



b. En déduire une égalité vérifiée par x.

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

CORRECTION

PartieA : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1.a. On suppose que l'effectit de la population donnée est important pour que l'on puisse considérer que l'échantillon de 700 personnes est réalisé par des avec remise donc indépendants.
On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
on interroge au hasard une personne de la population donnée,
succès S « la personne répond à la question posée »
la probabilité de succès est égale à $p=P(S)=0,6$
échec $\bar{S}$ « la personne ne répond pas à la question posée »
la probabilité de l'échec est égale à $q=P(\bar{S})=1-0,6=0,4$.
On effectue 700 épreuves indépendantes et la loi de probabilité de la variable aléatoire X, égale au nombre de succès en 700 épreuves, est **la loi binomiale de paramètres n=700 et p=0,6.**

b. En utilisant la calculatrice, on obtient $P(X\geqslant 400)=0,9427$ donc la meilleure approximation de $P(X\geqslant 400)$ est : **0,94.**

2. Le nombre minimal de personnes à interroger pour que $P(X\geqslant 400)$ soit supérieure à 0,9 est inférieur à 700 car pour 700 on obtient 0,94.
En utilisant la calculatrice :
pour 690 $P(X\geqslant 400)=0,8699<0,9$
pour 693 $P(X\geq 400)=0,8966<0,9$
pour 694 $P(X\geqslant 400)=0,9045>0,9$
Il faut donc interroger au minimum 694 personnes pour garantir une probabilité supérieures à 0,9 que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

1. Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % est $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

f est la proportion observée égale à 0,29

donc $I=\left[0,29-\frac{1}{\sqrt{n}};0,29+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

2. L'amplitude de I est : $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

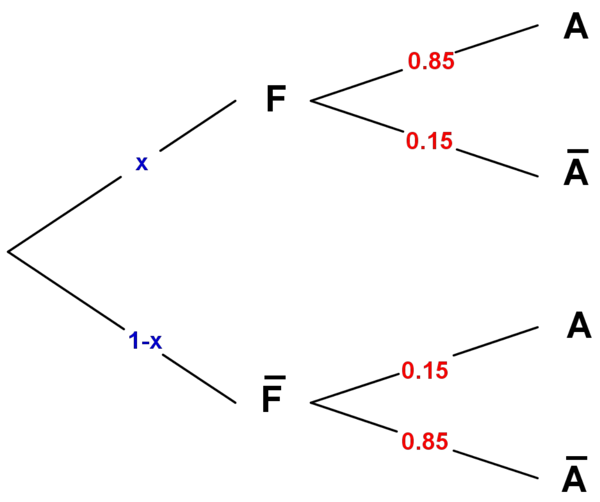
On veut obtenir : $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0,04\Leftrightarrow\sqrt{n}\geqslant\frac{2}{0,04}$ $\Leftrightarrow$ **n $\geqslant$ 2500.**

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

1. $P(A)=0,29$
15 % est le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu (quel que soit l'opinion de la personne interrogée) donc :
$P_F(\bar{A})=0,15$ et $P_{\bar{F}}(A)=0,15$
<u>Conséquences</u>
$P_F(A)=1-P_F(\bar{A})=1-0,15=0,85$
$P_{\bar{F}}(\bar{A})=1-P_{\bar{F}}(A)=1-0,15=0,85$

2.a. $x=P(F)$ et $P(\bar{F})=1-x$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$P(A)=P(F)\times P_F(A)+P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(A)$

$0,29=x\times 0,85+(1-x)+0,15$

3. $0,29=0,85x+0,15-0,15x \Leftrightarrow 0,7x=0,14 \Leftrightarrow x=\dfrac{14}{70}=0,2$

donc **P(F) = 0,2.**

<u>Conclusion</u>

Seulement 20 % des personnes ayant répondu sont réellement favorable au projet.