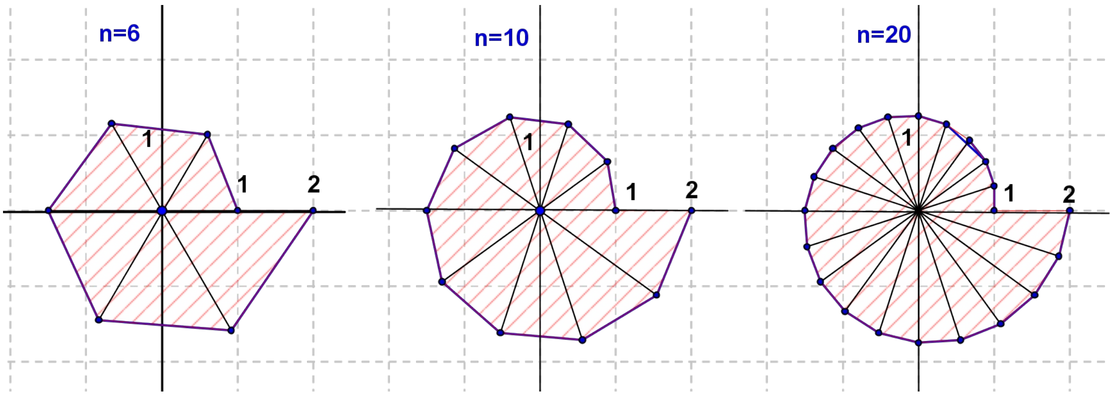
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale on s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct : $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k=\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0\leqslant k\leqslant n$
Par exemple, pour les entiers n=6, n=10 et n=20, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppoe que n=6. Ainsi, pour $0\leqslant k\leqslant 6$ on a $z_k=\left(1+\frac{k}{6}\right)e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de n+1 points
Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, déterminer OM_k.

2. Pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u};\overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u};\overrightarrow{OM_{k+1}})$. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}})$.

3. Pour tout k tel que $0\leqslant k\leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

4. On admet que le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$.

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

Variables : A est un nombre réel
k est un entier
n est un entier
Traitement : Lire la valeur de n
A prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à n-1
A prend la valeur $A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin Pour
Sortie : Afficher n

On entre dans l'algorithme n=10.
Recopier et compléter le tableau si dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.323	0.711	1.170	1.705	2.322	3.027	3.826	4.726		

5. On admet que $A_2=0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{7\pi}{3}=7{,}3$ à 10^{-1} près

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7{,}2$. On ne demande pas de déterminer n.

L1 **Variables :** A est un nombre réel
L2 k est un entier
L3 n est un entier
L4 **Traitement :** n prend la valeur 2
L5 A prend la valeur 0
L6 **Tant que . . . . . .**
L7 n prend la valeur n+1
L8 A prend la valeur 0
L9 Pour k allant de 0 à n-1
L10 A prend la valeur $A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
L11 Fin Pour
L12 Fin Tant que
L13 **Sortie :** **Afficher . . . .**

CORRECTION

Partie A : Ligne brisée formée de ssept points

n=6 pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

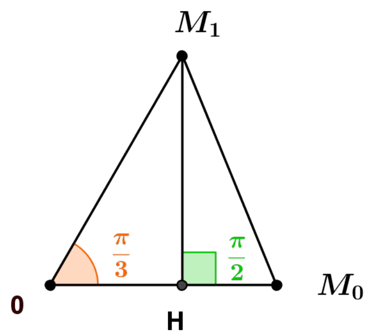
1. $z_1 = \left(+\frac{1}{6}\right)e^{i\frac{2\pi}{6}} = \frac{7}{6}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{12}+i\frac{7\sqrt{3}}{12}$

2. $z_0 = \left(1+\frac{1}{6}\right)e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{6}} = 1\times e^0 = 1$

$z_6 = \left(1+\frac{6}{6}\right)e^{i\frac{2\times 6\times\pi}{6}} = 2e^{i(2\pi)} = \mathbf{2}$

donc z_0 et z_6 sont des nombres entiers.

3.



$OM_0 = |z_0| = 1 \qquad OM_1 = |z_1| = \frac{7}{6}$

$\arg(z_0) = 0 \quad (2\pi) \qquad \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OM_0}\,;\overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

H est le pied de la hauteur du triangle OM_0M_1 issue de M_1 .

Le triangle OM_1H est rectangle en H.

$OM_1 = \frac{7}{6} \qquad \widehat{HOM_1} = \frac{\pi}{3}$

$\frac{M_1H}{OM_1} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$M_1H = OM_1\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$

a_0 est l'aire du triangle OM_0M_1

$a_0 = OM_0 \times OM_1\frac{}{2} = \frac{1\times\frac{7\sqrt{3}}{12}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$

Partie B : Ligne brisée à partir de n+1 points

1. Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$

$\overrightarrow{OM_k}(z_k) \qquad z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ donc $OM_k = |z_k| = 1+\frac{k}{n}$ car $\left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1$

2. Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$

$(\vec{u};\overrightarrow{OM_k}) = \arg(z_k) \quad (2\pi)$ donc $(\vec{u};\overrightarrow{OM_k}) = \dfrac{2k\pi}{n} \quad (2\pi)$

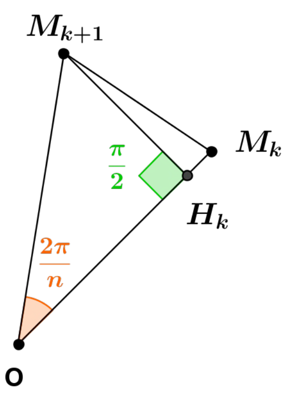
$(\vec{u};\overrightarrow{OM_{k+1}}) = \arg(z_{k+1}) \quad (2\pi)$ donc $(\vec{u};\overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\vec{u};\overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u};\overrightarrow{OM_k}) \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n} - \dfrac{2k\pi}{n} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n} \quad (2\pi)$

3.



Dans le triangle OM_kM_{k+1} on note H_k le pied de la hauteur issue de M_{k+1}.

Le triangle OK_kM_{k+1} est rectangle en H_k et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{M_{k+1}H_k}{OM_{k+1}}$

$M_{k+1}H_k = OM_{k+1}\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

Dans le triangle OM_kM_{k+1} on note H_k le pied de la hauteur issue de M_{k+1}.

Le triangle OK_kM_{k+1} est rectangle en H_k et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{M_{k+1}H_k}{OM_{k+1}}$

$M_{k+1}H_k = OM_{k+1}\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

4. Pour $k=8$

$a_8 = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{10}\right) \times 1{,}8 \times 1{,}9 = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \times 1{,}8 \times 1{,}9$

La calculatrice donne $a_8 = 1{,}005$ à 10^{-3} près et $A_8 = 4{,}726 + a_8 = \mathbf{5{,}731}$

Pour $k=9$

$a_9 = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \times 1{,}9 \times 2 = 1{,}9 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ On obtient $a_9 = 1{,}117$ à 10^{-3} près et $A_9 = 5{,}731 + 1{,}117 = \mathbf{6{,}848}$

On complète le tableau

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.323	0.711	1.170	1.705	2.322	3.027	3.826	4.726	5.731	6.848

5. L6 **Tant que A < 7,2**
L13 **Sortie** **Afficher n**