Exercice 1 6 points

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utlilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.
Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B , il ne sont que 5 %.
On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :
. A l'événement « le composant provient de la chaîne A »
. B l'événement « le composant provient de la chaîne B »
. S l'événement « le composant est sans défaut ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement S et P(S) = 0,89.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.
Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

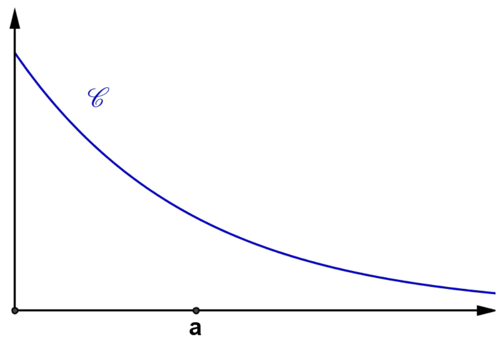
1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant élestronique fabriqué par cette usine est une variabe aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :
. pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$
. pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,dx$

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



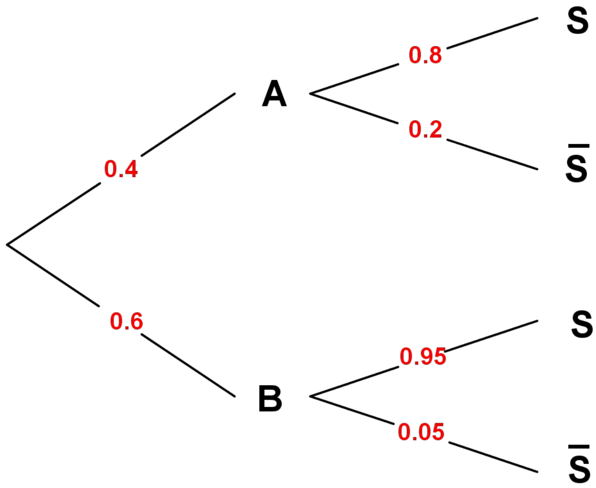
a. Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où a >0.
b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$
c. En déduire que $\lim_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$

2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0{,}5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0{,}099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.
a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.
b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
c. Donner l'espérance mathématique E(T) de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

CORRECTION

1. En utilisant les données de l'énoncé :
« La chaîne A produit 40 % de composants et la chaîne B le reste ».
Donc $P(A)=0{,}4$ et $P(B)=1-P(A)=1-0{,}4=0{,}6$
« En sortie de la chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de la chaîne B, ils ne sont que 5 % ».
Donc $P_A(\bar{S})=0{,}2$ et $P_B(\bar{S})=0{,}05$
On déduit :
$P_A(S)=1-P_A(\bar{S})=1-0{,}2=0{,}8$
$P_B(S)=1-P_B(\bar{S})=1-0{,}05=0{,}95$.
On donne les résultats sous la forme d'un arbre pondéré (non demandé dans l'énoncé).



En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
$P(S)=P(A\cap S)+P(B\cap S)=P(A)\times P_A(S)+P(B)\times P_B(S)=0{,}4\times 0{,}8+0{,}6\times 0{,}95=0{,}32+0{,}57=$ **0,89.**

2. On demande de calculer $P_S(A)$

$$P_S(A)=\frac{P(S\cap A)}{P(S)}=\frac{0{,}32}{0{,}89}=\frac{36}{89}=0{,}36 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Partie B

1. f est la fréquence observée de composants sans défaut dans cet échantillon, $f=0{,}92$.
Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est :

$$I=\left[0{,}92-\frac{1}{\sqrt{400}};0{,}92+\frac{1}{\sqrt{400}}\right]=\left[0{,}92-\frac{1}{20};1+\frac{1}{20}\right]=[0{,}92-0{,}05;0{,}92+0{,}05]$$

I=[0,87;0,97]

2. Si n (n est un entier naturel supérieur ou égal à un) est la taille de l'échantillon, on obtient pour intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

$$I=\left[0{,}92-\frac{1}{\sqrt{n}};0{,}92+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

L'amplitude de cet intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

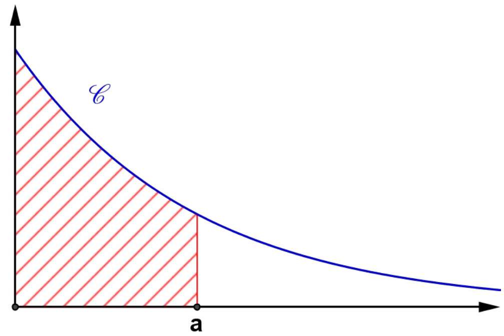
On obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}02\Leftrightarrow\frac{2}{0{,}02}\leqslant\sqrt{n}\Leftrightarrow 100\leqslant\sqrt{n}\Leftrightarrow 10000\leqslant n .$$

La taille de l'échantillon doit-être supérieure ou égale à 10 000.

Partie C

1.a. $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=a$.



b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.
La fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=-e^{-\lambda x}$ est une primitive de f.
On obtient :
$P(T \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,dx = F(t)-F(0)=-e^{-\lambda t}-(-e^0)=1-e^{-\lambda t}$

c. λ est un nombre réel strictement positif
$\lim_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ or $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$
Conséquence
$\lim_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$

2. $P(T \leqslant 7)=0,5 \Leftrightarrow 1-e^{-7\lambda}=0,5 \Leftrightarrow e^{-7\lambda}=0,5 \Leftrightarrow -7\lambda=\ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda=-\frac{\ln(0,5)}{7}$ = **0,099** à 10^{-3} près.

3.a. $P(T \geqslant 5)=1 - \int_0^5 f(x)\,dx=e^{-5\lambda}=e^{-5\times 0,099}$ = **0,61** à 10^{-2} près

b. Une loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement donc :
$P_{(T \geqslant 2)}(T \geqslant 7)=P(T \geqslant 7-2)=P(T \geqslant 5)$ = **0,61** à 10^{-2} près.

c. $E(T)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,099}$ = **10** à une unité près.
La durée de vie moyenne d'un composant est **10 ans.**

