Exercice 2 4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on donne les points :
$A(1;2;3)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(2;1;-1)$, $E(-1;-2;3)$ et $F(-2;-3;4)$.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 :
Les points A, B et C sont alignés.

Affirmation 2 :
le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 :
La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC]

Affirmation 4 :
Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

CORRECTION

Affirmation 1 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Justifications

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\0-2\\1-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\\1-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés donc l'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Justifications

$\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\times2+1\times(-2)+(-1)\times(-2)=-2+2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\times(-2)+1\times(-2)+(-1)\times(-2)=-2+2=0$

donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) et l'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Justifications

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{EF}=0\times(-1)+1\times(-1)+(-1)\times1=-2\neq0$

I est le milieu de [BC] $I(1;0;1)$

I appartient à la droite (EF) si et seulement si $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EI}=-2.\overrightarrow{EF}$

donc I appartient à la droite (EF) et au plan (ABC) et I est le point d'intersection de la droite (EF) et du plan (ABC) et l'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Justifications

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes alors le point D appartient au plan (ABC) donc $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{CD}=0\times3+1\times1+(-1)\times(-2)=1+2=3\neq0$

donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes et l'affirmation 4 est fausse.