Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\ln(x^2+1)$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$*\infty$
f '(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗		$+\infty$

3. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à [0;1], f(x) appartenant à [0;1].

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables : N et A sont des entiers naturels
Entrée : Saisir la valeur de A
Traitement : N prend la valeur 0
Tant que $N-\ln(N^2+1)<A$
N prend la valeur N+1
Fin Tant que
Sortie : Afficher N

a. Que fait cet algorithme ?
b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à [0;1].

2. Etudier les variations de la suite (u_n) .

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note L sa limite et on admet que L vérifie l'égalité $f(L)=L$.
En déduire la valeur de L

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\ln(x^2+1)$

1. $f(x)=x \Leftrightarrow x-\ln(x^2+1)=x \Leftrightarrow \ln(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x^2+1=e^0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
L'unique solution de l'équation $f(x)=x$ est **0.**

2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geqslant 0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3. Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$ (car f est croissante sur $\mathbb{R}$)

$f(0)=0-\ln(0^2+1)=0$

$f(1)=1-\ln(1^2+1)=1-\ln(2)\leqslant 1$

donc Si x appartient à [0;1] alors f(x) appartient à [0;1].

4.a. Cet algorithme détermine le plus petit entier naturel N tel que $A\leqslant N-\ln(N^2+1)$ (soit $A\leqslant f(N)$).

b. A= 100 et on peut déterminer N par balayage
$f(100)=90{,}8$ à 10^{-1} près, $f(110)=100{,}6$ à 10^{-1} près, $f(109)=99{,}6$ à 10^{-1} près.
Donc **N = 110.**

Partie B

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant u_n\leqslant 1$

. Initialisation

Pour n = 0 u_0-1 donc $0\leqslant u_0\leqslant 1$ et la propriété est vérifiée pour n = 0.

. Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $0\leqslant u_n\leqslant 1$ et on doit démontrer que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Or f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

Si $0\leqslant u_n\leqslant 1$ alors $f(0)=0$ et $f(1)\leqslant 1$ et $f(u_n)=u_{n+1}$

donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$

. Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant u_n\leqslant 1$ (c'est à dire u_n appartient à [0;1].

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=-\ln(u_n^2+1)$.

Or $u_n^2\geqslant 0$ et $u_n^2+1\geqslant 1$ et $\ln(u_n^2+1)\geqslant \ln(1)=0$

donc $-\ln(u_n^2+1)\leqslant 0$

Conséquence

La suite (u_n) est décroissante.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est une suite convergente.

4. Si L est a limite de (u_n) alors on admet que $f(L)=L$ donc L est une solution de l'équation $f(x)=x$.
Nous avons vu dans la partie A que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique : 0.
<u>Conclusion</u>
$L=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathbf{0}$**.**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés