Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a;b), on note pgcd(a;b) le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Exemple :

Soit Δ_1 la droite d'équation $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$

a. Montrer que si (x;y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x-12y$ est divisible par 3.

b. Existe-t-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y=\frac{m}{n}x-\frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que pgcd(m;n)=pgcd(p;q)=1.
Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.
Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $(x_0;y_0)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. En remarquant que le nombre ny_0-mx_0 est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.

b. En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $(x_0;y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0=\frac{m}{n}x-\frac{p}{q}$.

a. On pose $n=qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru-mv=1$.

b. En déduire qu'il existe un couple $(x_0;y_0)$ d'entiers relatifs tel que $y_0=\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}$

4. Soit Δ la droite d'équation $y=\frac{3}{8}x-\frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

Variables : M,N,P,Q : entiers relatifs non nuls tels que pgcd(M;N)=pgcd(P;Q)=1
X : entier naturel
Entrées : Saisir les valeurs de M,N, P, Q
Traitement et sorties : Si Q divise N alors X prend la valeur 0
Tant que $\left(\frac{M}{N}X-\frac{P}{Q}\text{n'est pas entier}\right)$ et $\left(-\frac{M}{N}X-\frac{P}{Q}\text{n'est pas entier}\right)$ faire
X prend la valeur X+1
Fin Tant que
Si $\frac{M}{N}X-\frac{P}{Q}$ est entier alors Afficher X, $\frac{M}{N}X-\frac{P}{Q}$
Sinon Afficher $-X$, $-\frac{M}{N}X-\frac{P}{Q}$
Fin Si
Sinon Afficher « Pas de solution »
Fin Si

a. Justifier que cet algorithme se termine pour tout entrée de M,N,P,Q, entiers relatifs non nuls tels que pgcd(M;N)=pgcd(P;Q)=1.

b. Que permet -t-il d'obtenir ?

CORRECTION

1.a. $15x-12y=3(5x-4y)$

Si x et y sont des entiers relatifs alors 5x-4y est un entier relatif et 15x-12y est un entier relatif divisible par 3.

b. $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 12y=15x-8\Leftrightarrow 15x-12y=8$

15x-12y est un entier relatif divisible par 3 et 8 n'est pas divisible par 3 donc il n'existe pas de point de la droite Δ_1 de coordonnées entières.

Généralisation

(E) : $y=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}x-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$

pgcd(m;n)=pgcd(p;q)=1

2.a. x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

$y_0=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}x_0-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\Leftrightarrow \mathrm{nq}\,y_0=\mathrm{mq}\,x_0-\mathrm{np}\Leftrightarrow \mathrm{np}=\mathrm{q}(\mathrm{m}\,x_0-\mathrm{n}\,y_0)$

$\mathrm{m}\,x_0-\mathrm{n}\,y_0$ est un entier relatif donc np est divisible par q.

b. $\mathrm{np}=\mathrm{q}(\mathrm{m}\,x_0-\mathrm{n}\,y_0)$

q divise le produit np et q est premier avec p donc le théorème de GAUSS nous permet d'affirmer que q divise n.

3.a. $\mathrm{n}=\mathrm{qr}$

n et m sont deux entiers relatifs premiers entre eux donc le théorème de BEZOUT nous permet d'affirmer qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $\mathrm{nu}-\mathrm{mv}=1$.

Or n=qr donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que $\mathrm{qru}-\mathrm{mv}=1$

b. $y_0=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}x_0-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\Leftrightarrow y_0=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{qr}}x_0-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\Leftrightarrow \mathrm{qr}\,y_0=\mathrm{m}\,x_0-\mathrm{pr}$ donc $\mathrm{qr}\,y_0-\mathrm{m}\,x_0=-\mathrm{pr}$

Or $\mathrm{qru}-\mathrm{mv}=1$ en multipliant les deux membres de cette égalité par -pr on obtient :

$(\mathrm{qru})(-\mathrm{pr})-(\mathrm{mv})(-\mathrm{pr})=-\mathrm{pr}$ soit $\mathrm{qr}(-\mathrm{upr})-\mathrm{m}(-\mathrm{vpr})=-\mathrm{pr}$

Il suffit de choisir $y_0=-\mathrm{upr}$ et $x_0=-\mathrm{vpr}$ et x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

<u>Conclusion</u>

Une droite rationnelle d'équation (E) : $y=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}x-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ comporte au moins un point de coordonnées entières si et seulement si q divise n.

4. (E) : $y=\frac{3}{8}x-\frac{7}{4}$ $\mathrm{m}=3$, $\mathrm{n}=8$, $\mathrm{p}=7$, $\mathrm{q}=4$ et pgcd(3;8)=pgcd(7;4)=1.

$8=4\times 2$ donc q divise n et $\mathrm{r}=2$

Δ comporte au moins un point de coordonnées entières

(E) $\Leftrightarrow 8y=3x-14$

On détermine des entiers relatifs u et v tels que : $8\mathrm{u}-3\mathrm{v}=1$.

On peut trouver rapidement les valeurs $\mathrm{u}=-1$ et $\mathrm{v}=-3$ ou utiliser l'algorithme d'Euclide.

$x_0=-\mathrm{vrp}=3\times 7\times 2=42$

$y_0=-\mathrm{upr}=1\times 7\times 2=14$

Le point $\mathrm{A}(42;14)$ appartient à Δ .

<u>Vérification</u>

$y=\frac{3}{8}\times 42-\frac{7}{4}=\frac{63}{4}-\frac{7}{4}=\frac{56}{4}=14$

5.a On considère la droite rationnelle Δ d'équation (E) : $\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\mathrm{X}-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$

Si Q ne divise pas N (Δ ne comporte pas de point de coordonnées entières) alors l'algorithme affiche :
« Pas de solution » et l'algorithme s'arrête.
Si Q divise N (Δ comporte au moins un point de coordonnées entières $(X_0;Y_0)$) alors pour une valeur de l'entier naturel X (au plus égal àla valeur absolue de X_0) ou de l'entier relatif -X on obtiendra une valeur entière pour Y et l'algorithme affichera $X , \frac{M}{N}X-\frac{P}{Q}$ ou $-X , -\frac{M}{N}X-\frac{P}{Q}$ et l'algorithme s'arrête.

b. Si Q divise N alors l'algorithme permet d'obtenir les coordonnées entières d'un point de la droite rationnelle dont l'abscisse est minimale en valeur absolue.

Remarque

Il faut écrire **un** point et non **le** point.

Exemple

$Y=\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}$ Les points $A(1;0)$ et $B(-1;-1)$ sont deux points de coordonnées entières et d'abscisse de valeur absolue minimale.