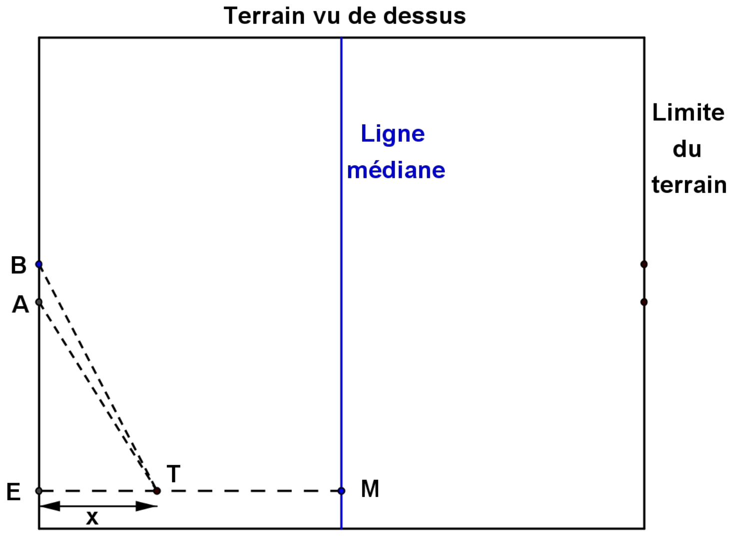
Exercice 4 5 points



Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir ci-dessus la figure) situé à l'extérieur du segment [AB].
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.
Pour maximaliser ses chances de réussite le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.
Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur(en mètre) ET, qu'on cherche à déterminer.
Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM=50\text{ m}$, $EA=25\text{ m}$ et $AB=5{,}6\text{ m}$.
On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radians de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$

Montrer que $\tan(\gamma)=\dfrac{5{,}6\,x}{x^2+765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximun lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle [0;50] de la fonction f définie par : $f(x)=x+\dfrac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeure de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

CORRECTION

1. EAT est un triangle rectangle en E.

$\tan(\alpha) = \tan(\widehat{ETA}) = \dfrac{EA}{ET} = \dfrac{25}{x}$

EBT est un triangle rectangle en E.

$\tan(\beta) = \tan(\widehat{ETB}) = \dfrac{EB}{ET} = \dfrac{25+5{,}6}{x} = \dfrac{30{,}6}{x}$

2. Les fonctions sin et cos sont dérvables sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour nombre réel x de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$\cos x \neq 0$, $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0$

donc tan est strictement croissante sur $\left[0:\dfrac{\pi}{2}\right[$

3. $\gamma = \beta - \alpha$

$\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta) \times \tan(\alpha)} = \dfrac{\dfrac{30{,}6}{x} - \dfrac{25}{x}}{1 + \dfrac{25}{x} \times \dfrac{30{,}6}{x}} = \dfrac{5{,}6x}{x^2+765}$

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;50], $h(x) = \dfrac{5{,}6x}{x^2+765} = \tan(\gamma) > 0$

$f(x) = x + \dfrac{765}{x} = \dfrac{x^2+765}{x}$

$f(x) = \dfrac{5{,}6}{h(x)}$

f et h ont des variations inverses, donc h admet un maximum si et seulement si f admet un minimum

f est dérivable sur]0;50]

$f'(x) = 1 - \dfrac{765}{x^2} = \dfrac{x^2 - 765}{x^2} = \dfrac{(x+\sqrt{765})(x-\sqrt{765})}{x^2}$

Le signe de $f'(x)$ sur]0;50] est le signe de $(x - \sqrt{765})$

donc f admet un minimum pour $\sqrt{765} = 27{,}66$ à 10^{-2} près

h admet donc un maximum pour $\sqrt{765} = 28$ à un mètre près.

$\tan(\gamma) = \dfrac{5{,}6 \times \sqrt{765}}{(\sqrt{765})^2 + 765} = \dfrac{5{,}6 \times \sqrt{765}}{2 \times 765} = \dfrac{2{,}8}{\sqrt{765}}$ =0,101 à 10^{-3} près.

En utilisant la calculatrice on obtient pour valeur maximale de γ : **0,01rd** à 10^{-2} près.

En degré on obtient : **5,78°.**