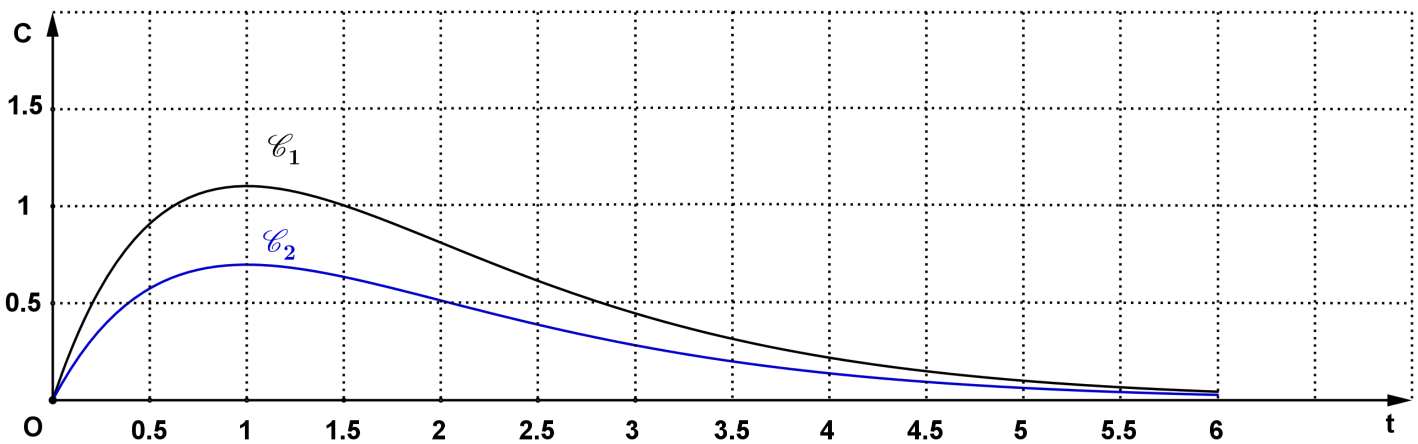
Exercice 1 7 points

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool.
L'instant $t=0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en grammes par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps.



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. A un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
A quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente.
Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=A\,t\,e^{-t}$ où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(0)$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« A quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente ».

Partie B- Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verre de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=2\,t\,e^{-t}$

1. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. A quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ?
Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de f(t) en $+\infty$.

Interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture.
On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0{,}2\ g.L^{-1}$ pour un jeune conducteur.

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1)=f(t_2)=0{,}2$.

b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale détectable dans le sang est estimée à $5\times10^{-3}\ g.L^{-1}$.

a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t)=2te^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5 p prend la valeur 2,5 C prend la valeur 0,21

Traitement :	Tant que $C>5\times10^{-3}$ faire :
	    t prend la valeur $t+p$
	    C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeur à 10^{-2} près.

	Initialisation	Etape1	Etape2
p	0.25		
t	3.5		
C	0.21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

CORRECTION

1. $C'(t)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ (relrésentative de C) au point d'abscisse: t.
Par lecture graphique, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse t est maximal pour t=0.
Conclusion
La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est maximale pour $t=0$, cette vitesse maximale est égale à $C'(0)$.

2. En considérant le graphique $C_1'(0)>C_2'(0)$ donc la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang de la personne P_1 est supérieure à celle de la personne P_2.
Une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.
Donc $\mathscr{C}_2$ est la courbe correspondant à la personne ayant la plus forte corpulence.

3. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f(t)=A\,t\,e^{-t}$

a. On a $(e^u)'=u'e^u$ et $(e^{-x})'=-e^{-x}$
f est dérivable sur l'intervalle $[0:+\infty[$.
On dérive un produit
$f'(t)=A\,e^{-t}-A\,t\,e^{-t}$
$f'(0)=A-0=A$

b. L'affirmation est **FAUSSE.**
Plus la personne est corpulente, plus la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est faible donc plus $f'(0)=A$ est petit.

Partie B : Cas particulier

Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f(t)=2\,t\,e^{-t}$

1. $f'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}$
Pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $e^{-t}>0$ donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $1-t$;
$f'(t)>0 \Leftrightarrow 0\leqslant t<1$
$f'(t)<0 \Leftrightarrow 1<t$
On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

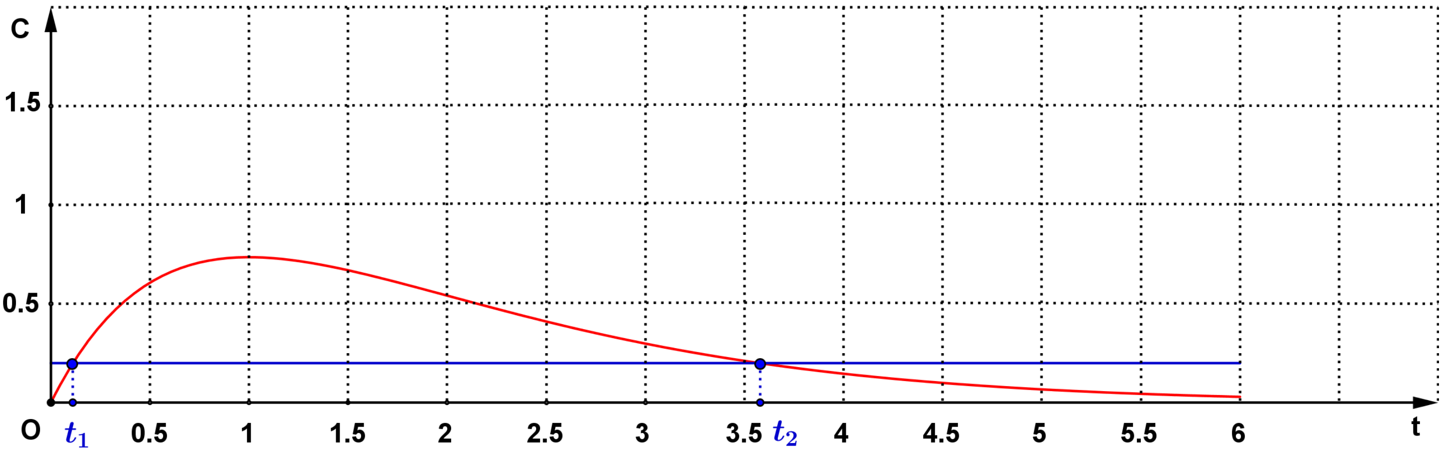
t	0		1		$+\infty$
f '(t)		+	0	−	
f (t)	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	

$f(0)=0$ et $f(1)=\frac{2}{e}$

2. f admet un maximum pour t = 1
$f(1)=2\times1\times e^{-1}=\frac{2}{e}=0{,}74$ à 10^{-2} près.

3. $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ or $f(t)=2\,t\,e^{-t}=\frac{2}{\frac{e^t}{t}}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\mathbf{0}$

4.



a. f est continue est strictement croissante sur l'intervalle [0;1], $f(0)=0$ et $f(1)=\frac{2}{e}$.

$f(0)<0{,}2<f(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0,2 admet un unique antécédent t_1 appartenant à l'ntervalle [0;1]

$f(t_1)=0{,}2$ en utilisant la calculatrice, on obtient $t_1=0{,}11$ à 10^{-2} près.

. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $f(1)=\frac{2}{e}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.

$0<0{,}2<f(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0,2 admet un unique antécédent t_2 appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

$f(t_2)=0{,}2$ en utilisant la calculatrice, on obtient $t_2=3{,}58$ à 10^{-2} près.

. <u>Conclusion</u>

Il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1)=f(t_2)=0{,}2$.

b. $0{,}11\times 60=6{,}6$

7 mn après l'ingestion de l'alcool on a un taux d'alcoolémie supériur à 0,2 $g.L^{-1}$.

La courbe représentative de C est au dessus de la droite d'équation $y=0{,}2$ sur l'intervalle $[t_1;t_2]$ et en dessous sur l'intervalle $]t_2;+\infty[$.

$0{,}58\times 60=34{,}8$.

La durée minimale que doit attendre Paul pour reprendre la route est 3h 35mn.

5.a. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ $f(1)=\frac{2}{e}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.

$0<5\times 10^{-3}<f(1)$ le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 5×10^{-3} admet un antécédent unique T dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

$f(T)=5\times 10^{-3}$

f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Si $1\leqslant t<T$ alors $f(t)>5\times 10^{-3}$

Si $T<t$ alors $f(t)<5\times 10^{-3}$

<u>Conclusion</u>

A partir de l'instant T la concentration en alcool n'est plus détectable.

b. En utilisant la calculatrice on obtient :

	Initialisation	Etape1	Etape2
p	0.25	0.25	0.25
t	3.5	3.75	4
C	0.21	0.18	0.15

La valeur affichée est la durèe pendant laquelle la concentration enalcool dans le sang est détevtable.

En utilisant la calculette on obtient 8,25 soit 8h 15mn.