Exercice 2 3 points

Soit u la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=2u_n+2n^2-n$.

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n+2n^2+3n+5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2, A3 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et u_n en fonction de n uniquement.

CORRECTION

1. En C2 : $=B2+2\times A2\times A2+3\times A2+5$
En A3 : $=A2+1$
En B3 : $=2\times B2+2\times A2\times A2-A2$

2. On complète le tableau précédent (non demandé dans l'énoncé)

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448
9	7	772	896
10	8	1635	1792

On conjecture que pour tout entier naturel n : $v_n=7\times 2^n$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $v_n=7\times 2^n$.

Initialisation
Pour n=0 $v_0=u_0+2\times 0^2+3\times 0+5=2+5=7$ et $7\times 2^0=7\times 1=7$
Donc la propriété est vérifiée pour n=0.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est hérédidaire pour tout entier naturel n , on suppose que $v_n=7\times 2^n$ et on doit démontrer que $v_{n+1}=7\times 2^{n+1}$

Or $v_{n+1}=u_{n+1}+2(n+1)^2+3(n+1)+5=2u_n+2n^2-n+2(n+1)^2+3(n+1)+5$
$v_{n+1}=2u_n+2n^2-n+2n^2+4n+2+3n+3+5=2u_n+4n^2+6n+10$
$v_{n+1}=2(u_n+2n^2+3n+5)=2v_n=2\times 7\times 2^n=7\times 2^{n+1}$
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que tout entier naturel n, on a : $v_n=7\times 2^n$.

D'autre part : pour tout entier naturel n, on a $v_n=u_n+2n^2+3n-5$ donc $u_n=v_n-2n^2-3n-5$
On obtient $u_n=7\times 2^n-2n^2-3n-5$