Exercice 3 5 points

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes.Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda=0{,}2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles du mois d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estime le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître.
Il obtient les informations suivantes :
. 64 % des personnes interrogés sont des nouveaux adhérents ;
. 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possédent un télescope personnel ;
. 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est 0,494.

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possède un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une ville de 2500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.
L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

CORRECTION

Partie A

1. Le temps d'attente est modélisé par la variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}2$.
La fonction de répartition de T est la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}=0{,}2\,e^{-0{,}2\,t}$.
La fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t)=-e^{-0{,}2\,t}$ est une primitive de f.
Une loi exponentielle est une loi de vie sans vieillissement donc la probabilité que lorsque le groupe voit une étoile filante qu'il attente moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est $P(0\leqslant T\leqslant 3)$.

$$P(0\leqslant T\leqslant 3)=\int_0^3 f(t)\,dt=F(3)-F(0)=-e^{-0{,}6}+e^0=1-e^{-0{,}6}$$

En utilisant la caiculatrice
$P(0\leqslant T\leqslant 3)=1-0{,}549=$ **0,451.**

2. Il suffit de déterminer t_0 tel que $P(0\leqslant T\leqslant t_0)=0{,}95$.

$$F(t_0)-F(0)=0{,}95\Leftrightarrow 1-e^{-0{,}2t_0}=0{,}95\Leftrightarrow 0{,}05=e^{-0{,}2t_0}\Leftrightarrow -0{,}2\,t_0=\ln(0{,}05)\Leftrightarrow t_0=-\frac{\ln(0{,}05)}{0{,}5}=14{,}98 \text{ à } 10^{-2}$$

près donc $t_0=$ **15mn.**

3. L'espérance mathématique de T est égale à $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}2}=5$.
Le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes que l'on puisse estimer lors de cette sortie de 2h soit 120mn est : $\frac{120}{5}=$ **24.**

Partie B

On note :
N : « la personne chisie au hasard est un nouvel adhérent »
$\bar{N}$: « la personne choisie au hasard est un ancien adhérent »
T : « la personne choisie au haard possède un télescope »
$\bar{T}$: « la personne choisie au hasard ne possède pas de télescope.

. 64 % des personnes interrogées sont de nouveaux adhérents
donc $P(N)=0{,}4$
. 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possède un télescope
donc $P(\bar{N}\cap T)=0{,}27$
. 65 % des nouveaux adhérents ne possèdent pas un télescope personnel
donc $P_N(\bar{T})=0{,}65$

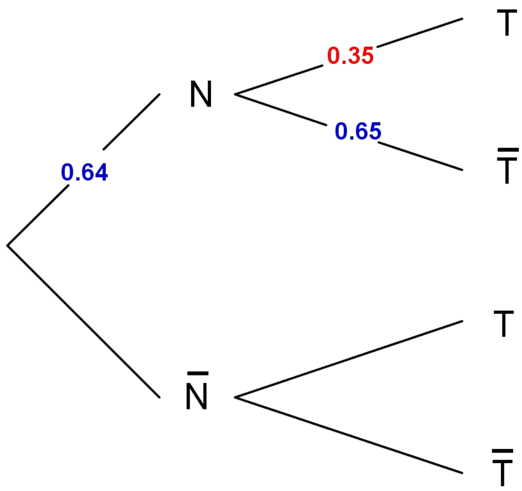
1. En utilisant la formules des probabilités totales (ou en utilisant un arbre pondéré incomplet), on obtient

$P(T)=P(N\cap T)+P(\bar{N}\cap T)$

$P(\bar{N}\cap T)=0{,}27$
$P(N\cap T)=P(N)\times P_N(T)$
$P_N(T)=1-P_N(\bar{T})=1-0{,}68=0{,}35$

$P(T)=0{,}64\times 0{,}35+0{,}27=0{,}224+0{,}27=$ **0,494.**

Arbre pondéré incomplet



<u>Remarque</u>

On peut compléter cet arbre pondéré (mais ce résultat n'est pas demandé et n'est pas nécessaire pour la résolution de l'exercice).

$P(\bar{N})=1-P(N)=1-0,64=0,36$

$P(\bar{N}\cap T)=0,27=P(\bar{N})\times P_{\bar{N}}(T)=0,36\times P_{\bar{N}}(T)$

donc $P_{\bar{N}}(T)=\dfrac{0,27}{0,36}=\dfrac{3}{4}=0,75$

<u>Conséquence</u>

$P_{\bar{N}}(\bar{T})=1-P_{\bar{N}}(T)=1-0,75=0,25$

2. On nous demande de calculer $P_T(N)$

$P_T(N)=\dfrac{P(N\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,224}{0,494}=$ **0,453 à** 10^{-3} près.

Partie C

L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Donc si on choisit au hasard une personne du village, la probabilité quelle soit favorable à la coupure de l'éclairage nocturne est p=0,5.

$n=100\geqslant 30 \qquad np=50\geqslant 5 \qquad n(1-p)=50\geqslant 5$

On considère l'intervalle de fluctuation asymptotique :

$I_n=\left[p-1,96\times\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;p+1,96\times\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$

$\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\dfrac{0,5\times 0,5}{100}}=\dfrac{0,5}{10}=0,05$

$1,96\times 0,05=0,098$

$I_{100}=[0,5-0,098;0,5+0,098]=[0,402;0,598]$

La fréquence observée dans l'échantillon de 100 personnes est $f=\dfrac{54}{100}=0,54$

f appartient à I_{100} donc ce résultat ne permet pas de refuser l'hypothèse et l'astronome n'est pas amené à changer d'avis .