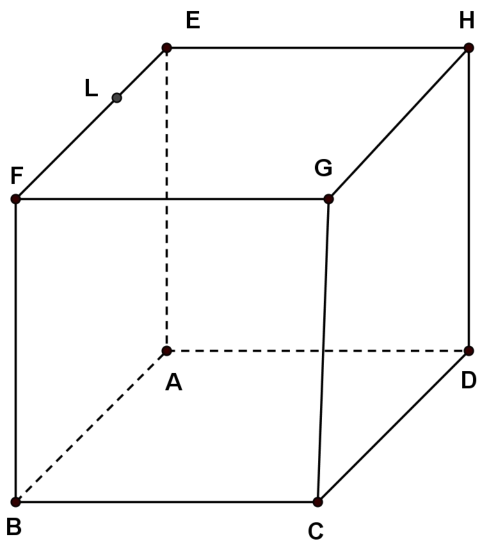
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :**
   Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, Les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$ $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

2. **Proposition 2 :**
   Il n'existe pas d'entier naurel n non nul tel que $[i(1+i)]^{2n}$ soit un réel stictement positif.

3. ABCDEFGH est un carré de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3 :
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

Proposition 4 :
Le triangle DBL est rectangle en B

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2;5] et dont on connaît le tableau de variation donné ci-dessous.

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

Proposition 5
L'intégrale $\int_2^5 f(x)\,dx$ est comprise entre 1,5 et 6.

CORRECTION

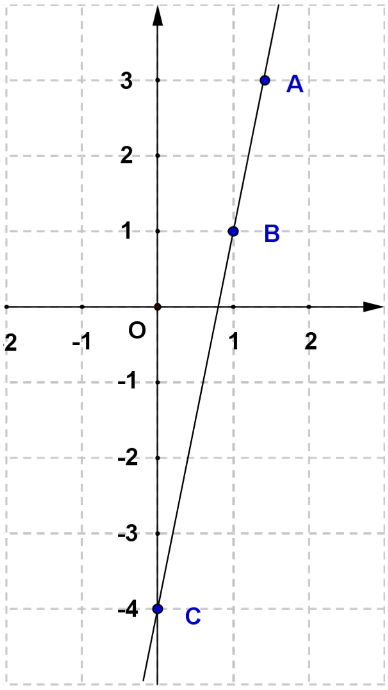
Proposition 1 : **VRAIE**

Justiications

. Approche géométrique

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place les points $A(\sqrt{2}+3i)$, $B(1+i)$ et $C(-4i)$.

Puis on trace la droite (BC).



On ne peut pas affirmer que cette droite passe par A.

. Etude analytique

$\overrightarrow{BA}(z_A-Z_B)$ $\quad\overrightarrow{BC}(z_C-z_B)$

Les points A;B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ est un nombre réel.

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\sqrt{2}-1+2i}{-1-5i}=\frac{(\sqrt{2}-1+2i)(-1+5i)}{1+25}=\frac{-\sqrt{2}+1-10+i(5\sqrt{2}-5-2)}{26}=\frac{-\sqrt{2}-9}{26}+i\frac{5\sqrt{2}-7}{26}$$

La partie imaginaire est non nulle donc les points A, B et C ne sont pas alignés et les proposition 1 est vraie.

Proposition 2 : **FAUSSE**

Justifications

$[i(1+i)]^{2n}=[i^2(1+i)^2]^n=[-1(2i)]^n=(-2)^n i^n$

pour n=4 $\quad(-2)^4=16$ et $i^4=1$ donc $[i(1+i)]^{2\times 4}=16$ qui est un réel srrictement positif.

La proposition 2 est fausse.

Proposition 3 : **FAUSSE**

Justifications

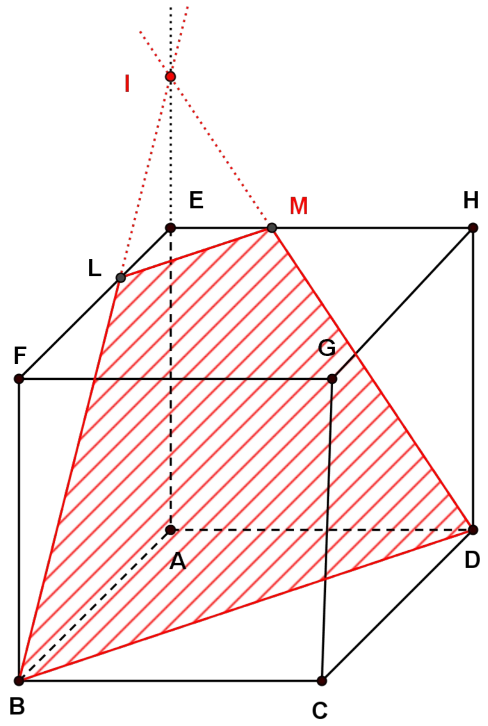
On construit la section du cube par le plan (BDL).

Les doites (BL) et (AE) sont sécantes en I.

Les droites (DI) et (EH) sont sécantes en M.

La section du cube par le plan (BDL) est le trapèze DBLM.

La proposition 2 est donc fausse.



Proposition 4 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Justifications

. Géométriquement
Si une droite est perpendiculaire aux droites (BF) et (BL) alors cette droite est perpendiculaire au plan (ABF) donc cette droite est parallèle à (BC).
Or (BD) est perpendiculaire à (BF) et n'est pas parallèle à (BC) donc (BD) n'est pas perpendiculaire à (BL) et letriangle DBL n'est pas rectangle en B et la proposition 4 est fausse.

. Analytiquement
$(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormal de l'espace.

$B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $L\left(\frac{1}{3};0;1\right)$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$

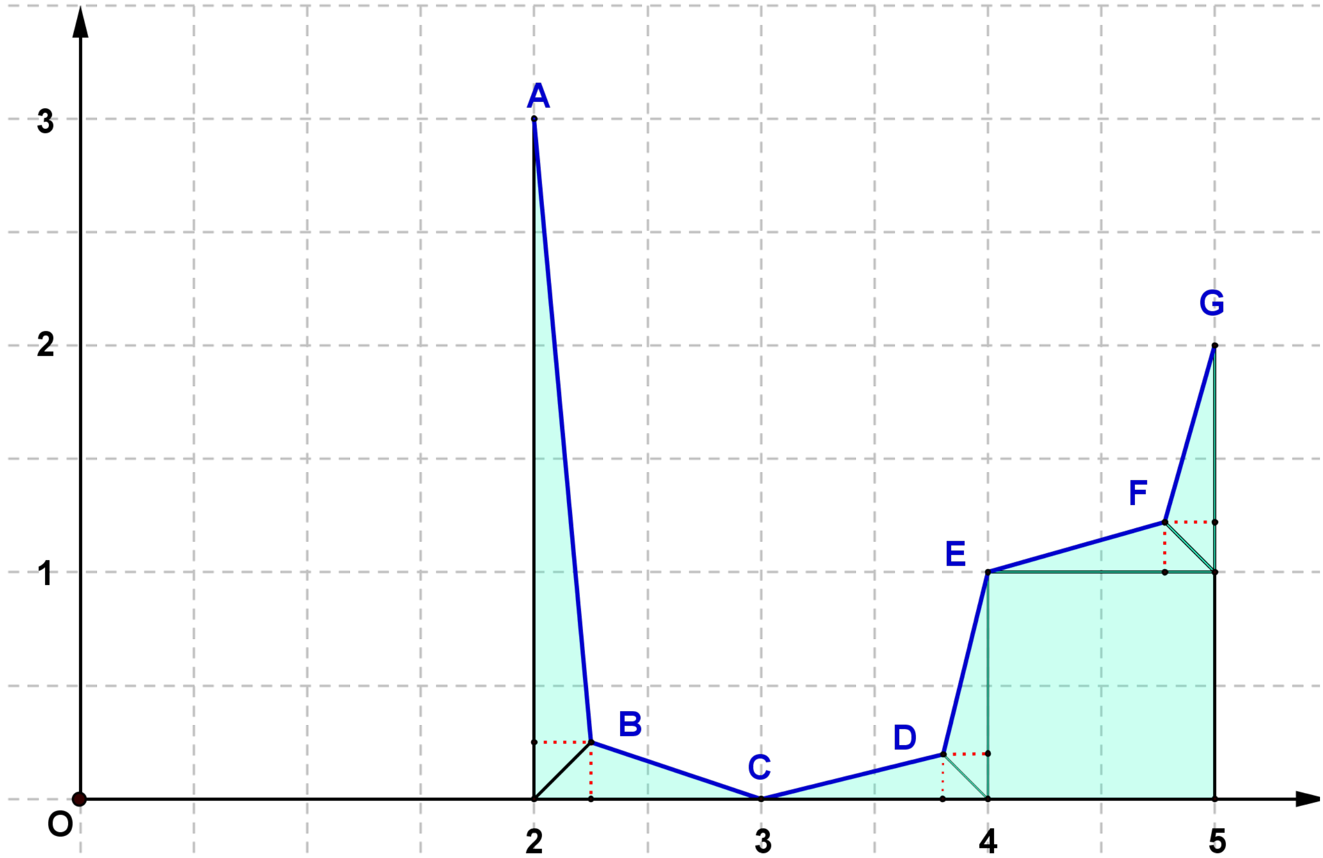
$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BL}=(-1)\times\left(-\frac{2}{3}\right)+1\times 0+0\times 1=\frac{2}{3}\neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas orthogonaux donc le triangle DBL n'est pas rectangle en B et la proposition 4 est fausse.

Proposition 5 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Justifications :

. La fonction f est continue et positive sur[2;5] donc $\int_2^5 f(x)\,dx$ est l'aire en unité d'aire de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=2 et x=5.
. Pour pouvoir calculer « facilement » cette aire on choisit des fonctions affines par morceaux, en décomposant en aires de triangles connaissant leurs bases et leurs hauteurs (et non les équations des segments de droites).
. La courbe qui est une ligne brisée doit passer par les points $A(2;3)$, $C(3;0)$, $E(1;1)$ et $G(5;2)$ (donnés par le tableau de variation



a est un nombre réel strictement positif (aussi voisin de zéro que l'on veut).
$B(2+a\,;a)$

$\int_2^3 f(x)\,dx$ est égale à la somme de deux triangles de bases respectives 3 et 1 et de hauteurs issues de B : a.

$\int_2^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times 3a + \frac{1}{2}\times a = 2a$

b est un nombre réel strictement positif (aussi voisin de zéro que l'on veut).
$D(4-b\,;b)$

$\int_3^4 f(x)\,dx$ est égale à la somme des aires de deux triangles de base 1 et de hauteur: b.

$\int_3^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$

c est un nombre réel strictement positif (aussi voisin de zéro que l'on veut).
$F(5-c\,;1+c)$

$\int_4^5 f(x)\,dx$ est égale à la somme des aires d'un carré de côté 1 et de deux triangles de base 1 et de hauteur: c.

$\int_4^5 f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = 1+c$

donc $\int_2^5 f(x)\,dx = 1+2a+b+c$

Si on choisit $a=b=c=0{,}1$ alors on obtient $\int_2^5 f(x)\,dx = 1{,}4 < 1{,}5$ et la proposition 5 est fausse.

. <u>Remarque</u>

$\int_2^5 f(x)\,dx$ est inférieure ou égale à 6.