Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquersi elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse éxacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
   Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de n^2+n n'est jamais égal à4.

2. On considère la suite u définie pour n >1, par :
   $u_n=\frac{1}{n}\text{pgcd}(20;n)$
   Proposition 2
   La suite (u_n) est convergente.

3. **Proposition 3**
   Pour toute matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A\times B=B\times A$.

4. Un mobile peut occuper deux position A et B, à chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
   Pour un entier naturel n, on note :

. A_n l'événement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité.
. B_n l'événement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa ptobabilité.
. X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$;

On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=M\times X_n$ avec $M=\begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Proposition 4
La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

Proposition 5
Il existe un état initial $X_0=\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1=3a_1$.

CORRECTION

1. **Proposition 1 :** **VRAIE**

Justifications :

Le chiffre des unités d'un entier naturel N est le reste de la division euclidienne de N par 10.

Donc $N \equiv u\,(10)$ et $0 \leqslant u \leqslant 9$

Si $n \equiv 0\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 0^2+0\,(10)$ **u = 0**
Si $n \equiv 1\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 1^2+1\,(10)$ **u = 2**
Si $n \equiv 2\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 2^2+2\,(10)$ **u = 6**
Si $n \equiv 3\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 3^2+3\,(10)$ et $12 \equiv 2\,(10)$ **u = 2**
Si $n \equiv 4\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 4^2+4\,(10)$ et $20 \equiv 0\,(10)$ **u = 0**
Si $n \equiv 5\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 5^2+5\,(10)$ et $30 \equiv 0\,(10)$ **u = 0**
Si $n \equiv 6\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 6^2+6\,(10)$ et $42 \equiv 2\,(10)$ **u = 2**
Si $n \equiv 7\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 7^2+7\,(10)$ et $56 \equiv 6\,(10)$ **u = 6**
Si $n \equiv 8\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 8^2+8\,(10)$ et $72 \equiv 2\,(10)$ **u = 2**
Si $n \equiv 9\,(10)$ alors $n^2+n \equiv 9^2+9\,(10)$ et $90 \equiv 0\,(10)$ **u = 0**

Donc le chiffre des unités de n^2+n n'est jamais égal à 4 et la proposition 1 est vraie.

2. **Proposition 2 :** **VRAIE**

Justifications :

Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{n}\,\mathrm{pgcd}(20;n)$

Or $1 \leqslant \mathrm{pgcd}(20;n) \leqslant 20$

donc $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{20}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{20}{n} = 0$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affiemer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et la proposiion 2 est vraie.

3. **Proposition 3 :** **FAUSSE**

Justifications :

Il suffit de donner un contre exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

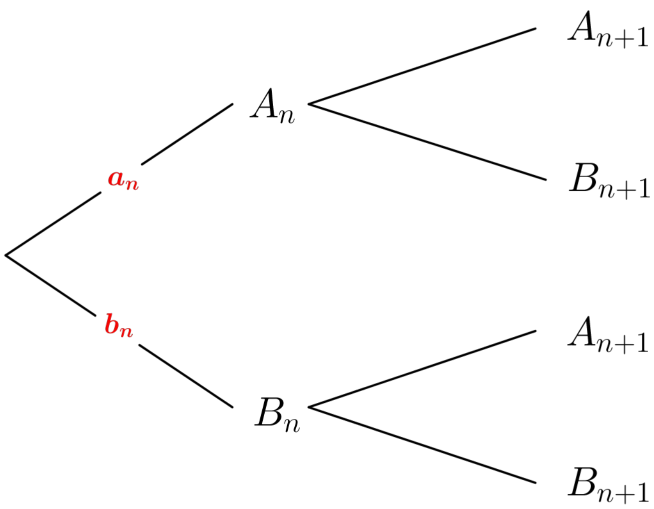
$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A \times B \neq B \times A$

La proposition 3 est fausse.

4. **Proposition 4 :** **Vraie**

Justifications :



En utilisant la formule des probabiités totales ou en utilisant l'arbre pondéré

$P(B_{n+1})=(A_n)\times p_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1})$

$P(B_{n+1})=b_{n+1}=a_n\times P_{A_n}(B_{n+1})+b_n\times P_{B_n}(B_{n+1})$ (1)

Dans l'énoncé on précise que : $X_{n+1}=M\times X_n$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

donc $a_{n+1}=0{,}55\,a_n+0{,}3\,b_n$

$b_{n+1}=0{,}45\,a_n+0{,}7\,b_n$ (2)

En comparant (1) et (2) on ontient $P_{A_n}(B_{n+1})=0{,}45$ et $P_{B_n}(B_{n+1})=0{,}7$

La proposition 4 est vraie.

Proposition 5 : $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$

Justifications :

$X_1=M\times X_0$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=0{,}55\,a_0+0{,}3\,b_0 \\ b_1=0{,}45\,a_0+0{,}7\,b_0 \end{cases}$$

$3\,a_1=1{,}65\,a_0+0{,}9\,b_0$

$3\,a_1-b_1=0=1{,}2\,a_0+0{,}2\,b_0$

donc $0{,}2\,b_0=-1{,}2\,a_0$

Il y a contradiction avec le fait que a_0 et b_0 sont stictement positifs, donc la proposition 5 est fausse.