Exercice 1 4 points

On considère un solide ADECBF constitué de deux Pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (**à rendre avec la copie). Toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK})$

1.a. Montrer que $IE=\frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

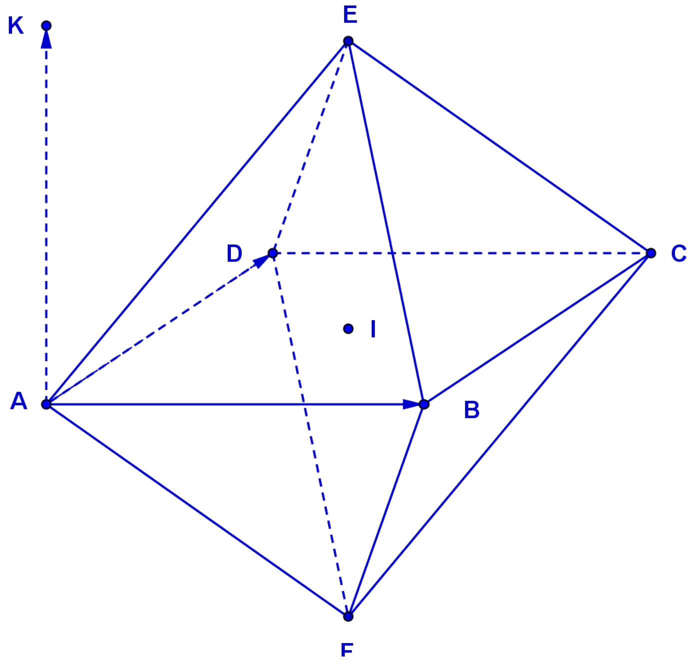
2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui de [AB].

a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

c. Construire sur **l'annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

ANNEXE
à rendre avec la copie



CORRECTION

1.a. Le triangle AEC est isocèle $AE=EC=1$
I est le milieu de [AC], donc (EI) est la médiane du triangle AEC issue de E, cette médiane est aussi la hauteur du triangle AEC issue de E et le triangle AIE est rectangle en I.
En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient $AE^2=AI^2+IE^2$
$AI=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (la diagonale d'un carré de côté 1 a pour longueur $\sqrt{2}$) et $AE=1$
<u>Conclusion</u>
$1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+IE^2$ et $IE^2=1-\frac{2}{4}=\frac{2}{4}$
donc $IE=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABE), par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
<u>Remarque</u>
(EI) est aussi une hauteur du triangle DBE donc la droite (EI) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD) et (EI) est perpendiculaire au plan (ABD) c'est à dire les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires.
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $I(0{,}5;0{,}5;0)$ et $E\left(0{,}5;0{,}5;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=1\times0+0\times(-2)+0\times\sqrt{2}=0$
$\overrightarrow{AE}.\vec{n}=0{,}5\times0+0{,}5\times(-2)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=-1+1=0$
<u>Conclusion</u>
Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABE)

c. Le point $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABE) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\times x-2\times y+\frac{\sqrt{2}}{2}\times z=0$
<u>Conclusion</u>
(ABE) : $0.x-2y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0$

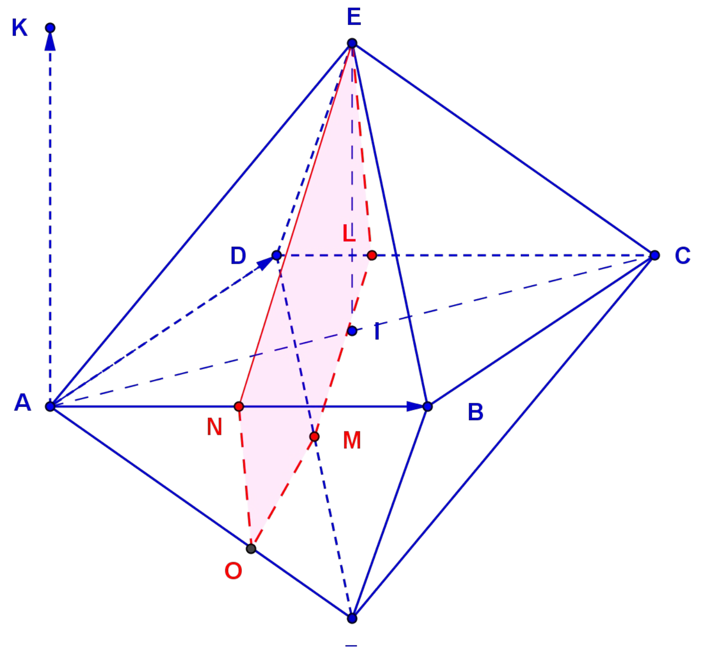
2. M est le milieu de [DF] et N est le milieu de [AB]
a. Pour démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles, il suffit de démontrer que $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (FDC) c'est à dire que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}$.
Or $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{DC}=0$.

On a $F\left(0,5;0,5;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $D(0;1;0)$ donc $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{DF}=0\times 0,5+(-2)\times(-0,5)+\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-1=0$

La droite d'intersection des plans (ABE) et (FDC) est la droite (EN).
Les plans (ABE) et (FDC) sont parallèles donc la droite d'intersection des plans (FDC) et (EMN) est parallèle à la droite (EN).
Le point M appartient aux deux plans (FDC) et (EMN).
<u>Conclusion</u>
La droite d'intersection des plans (FDC) et (EMN) est la parallèle à (NE) passant par M.

c.



On note L le point d'intersection de la parallèle à (NE) passant par M et de la droite (DC).
La droite d'intersection des plans (MNE) et (DCE) est la droite (EL).
On peut aussi démontrer que les plans (ABF) et (DCE) sont parallèles.
La droites d'intersection des plans (MNE) et (ABF) est la parallèle à (FE) passant par N.
On note O le point d'intersection de cette droite et de (AF).
La droite d'intersection des plans (MNE) et (ACF) est (MO) .