Exercice 2 — 4 points

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A
Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

2. Quelle est probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B
Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.
Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C
Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle une balle à droite est toujours égale à la probabilité que la balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :
. la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
. La probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

CORRECTION

Partie A

On considère l'épreuve de Bernoulli :
Le lance-balle envoie une balle
Succès S : « le lance-balle envoie la balle à droite »
La probabilité de succès est égale à $p=P(S)=0{,}5$
Echec $\bar{S}$: « le lance-balle envoie la balle à gauche »
La probabilité de l'échec est égale à $q=P(\bar{S})=0{,}5$.

Le lance-balle envoie de manière régulière, 20 balles (on effectue 20 épreuves indépendantes).
La variable aléatoire X égale au nombre de balles envoyées à droite c'est à dire au nombre de succès en 20 épreuves admet pour loi de probabilité ,la loi binomiale de paramètres $n=20$
et $p=10$.

1. On nous demande $P(X=10)$
La calculatrice nous donne $P(X=10)$ = **0,176** à 10^{-3} près

2. On nous demande $P(5\leqslant X\leqslant 10)$
La calculatrice nous donne $P(5\leqslant X\leqslant 10)$ = **0,582** à 10^{-3} près.

Partie B

$n=100\geqslant 30 \qquad np=50\geqslant 5 \qquad nq=50\geqslant 5$
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique

$$I=\left[0{,}5-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}5\times 0{,}5}{100}};0{,}5+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}5\times 0{,}5}{100}}\right]$$
$$I=\left[0{,}5-1{,}96\times\frac{0{,}5}{10};0{,}5+1{,}96\times\frac{0{,}5}{10}\right]$$
$$I=[0{,}5-0{,}098;0{,}5+0{,}098]$$
$$I=[0{,}402;0{,}598]$$

La fréquence observée dans les 100 lancers est : $f=\frac{42}{100}=0{,}42$

f appartient à l'intervalle I.
Conséquence
Les doutes du joueur ne sont pas justifiées.

Partie C

On note :
D l'événement : « le lance-balle envoie une balle à droite »
G l'événement : « le lance-balle envoie une balle à gauche »
L l'événement : « le lance-balle envoie une balle liftée »
C l'événement le lance-balle envoie une balle coupée ».

. La probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24
donc $P(D\cap L)=0{,}24$
$P(D\cap L)=P(D)\times P_D(L)=0{,}5\times P_D(L)$

$P_D(L)=\frac{0{,}24}{0{,}5}=0{,}48$

$P_D(C)=1-P_D(L)=1-0{,}48=0{,}52$

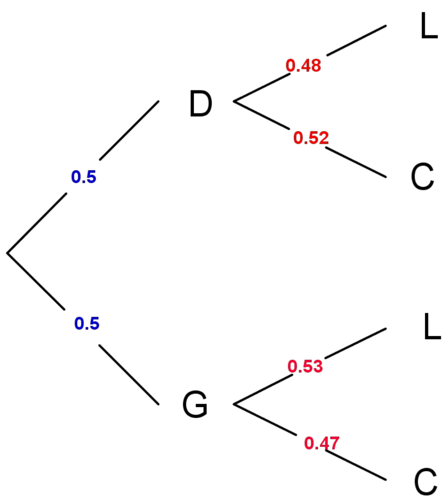
. La probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235
donc $P(G\cap C)=0{,}235$

$P(G\cap C)=P(G)\times P_G(C)=0{,}5\times P_G(c)$

$P_G(C)=\frac{0{,}235}{0{,}5}=0{,}47$

$P_G(L)=1-P_G(C)=1-0{,}47=0{,}53$

On peut construire un arbre pondéré (non demandé)



On nous demande de calculer : $P_C(D)$

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{P(D)\times P_D(C)}{P(C)}$$

En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré

$P(C)=P(D\cap C)+P(G\cap C)=0{,}5\times 0{,}52+0{,}5\times 047=0{,}495$

$P_C(D)=\frac{0{,}5\times 0{,}52}{0{,}495}=\frac{0{,}26}{0{,}495}$ = **0,529** à 10^{-3} près.