Exercice 3 4 points

On conssidère la fonction f définie sur l'intervalle [0;1] par : $f(x)=\frac{1}{1+e^{1-x}}$

Partie A

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0;1].

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [0;1], $f(x)=\frac{e^x}{e^x+e}$ (on rappelle que $e^1=e$)

3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x)\,dx = \ln(2)+1-\ln(1+e)$

Partie B

soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur [0;1] par : $f_n(x)=\frac{1}{1+ne^{1-x}}$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général : $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.
Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0 .

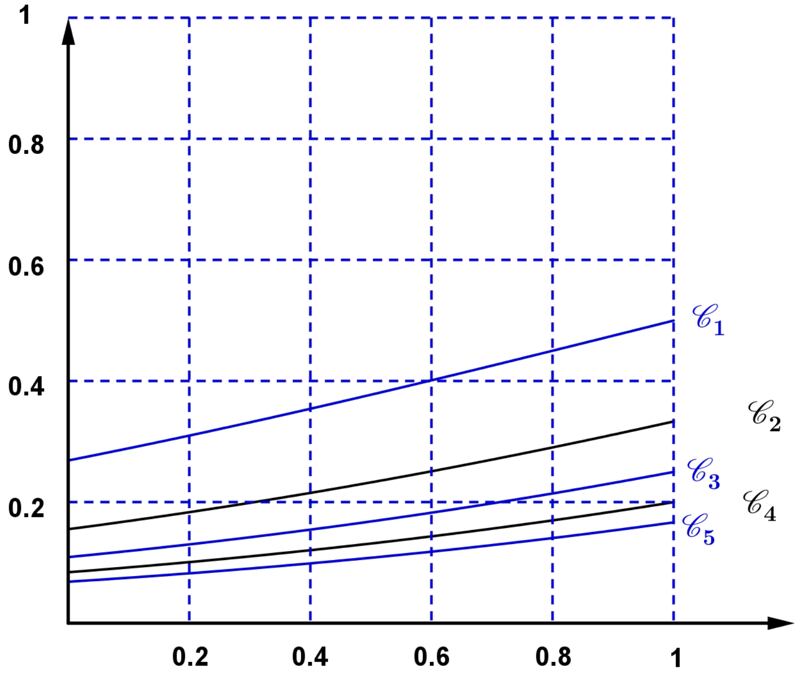
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0 .

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

f est la fonction définie sur l'intervalle [0;1] par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}$

Partie A

1. f est dérivable sur [0;1]

$(e^u)'=u'e^u \qquad (e^{1-x})'=-e^{1-x}$

$f'(x)=\dfrac{-(-e^{1-x})}{(1+e^{1-x})^2}=\dfrac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}>0$

f est strictement croissante sur [0;1]

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] : $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par : e^x

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x(1+e^{1-x})}=\dfrac{e^x}{e^x+(e^{1-x})\times e^x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^{1-x+x}}=\dfrac{e^x}{e^x+e^1}=\dfrac{e^x}{e^x+e}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1], on pose : $u(x)=e^x+e>0 \qquad u'(x)=e^x$

et $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

donc la fonction F définie sur [0;1] par $F(x)=\ln(u(x))=\ln(e^x+e)$ est une primitive de f sur [0;1].

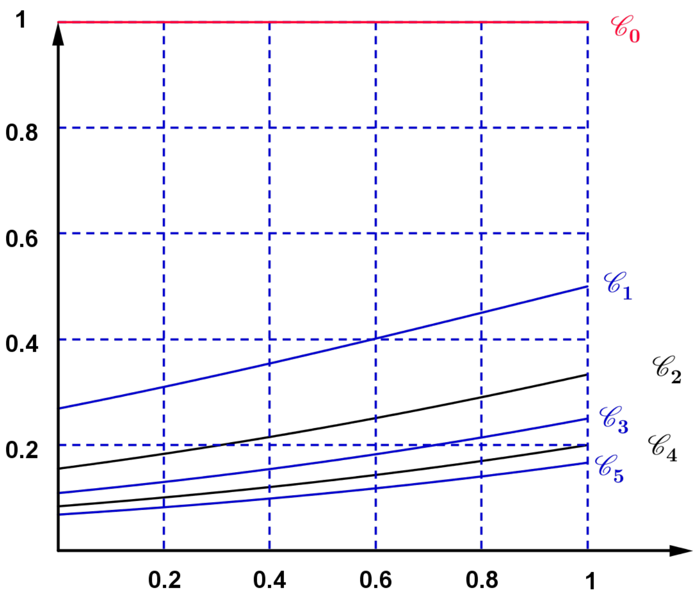
$\int_0^1 f(x)\,dx=F(1)-F(0)=\ln(2e)-\ln(1+e)=\ln(2)+\ln(e)-\ln(1+e)=\ln(2)+1-\ln(1+e)$

Partie B

Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}$

et $u_n=\int_0^1 f(x)\,dx$

1.



Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$f_0(x)=\dfrac{1}{1+0\times e^{1-x}}=1$

$\mathscr{C}_0$ est le segment de la droite d'équation $y=1$ sur l'intervalle [0;1].

2. Pour tout x de l'intervalle [0;1] on a : $f_n(x)>0$ donc u_n est l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1.

<u>Conséquence</u>

u_0 est l'aire d'un carré de côté de longueur 1 donc $u_0 =$**1.**

3. On constate que $\mathscr{C}_5$ est en dessous de $\mathscr{C}_4$ et que $\mathscr{C}_4$ est en dessous de $\mathscr{C}_3$ …..

On peut conjecturer que $\mathscr{C}_{n+1}$ est en dessous de $\mathscr{C}_n$ pour tour entier naturel n donc que $u_{n+1}\leqslant u_n$.

<u>Conjecture</u>

(u_n) est une suite décroissante.

. Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] :

$$f_n(x)-f_{n+1}(x)=\frac{1}{1+ne^{1-x}}-\frac{1}{1+(n+1)e^{1-x}}=\frac{1+(n+1)e^{1-x}-1-ne^{1-x}}{(1+ne^{1-x})(1+(n+1)e^{1-x})}$$

$$=\frac{e^{1-x}}{(1+ne^{1-x})(1+(n+1)e^{1-x})}\geqslant 0$$

En utilisant la positivité de l'intégrale, on peut affirmer :

$$\int_0^1 (f_n(x)-f_{n+1}(x))\,dx\geqslant 0$$

donc $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ - $\int_0^1 f_{n+1}\,dx\ \geqslant 0$

soit $u_n-u_{n+1}\ \geqslant 0$

<u>Conclusion</u>

La suite (u_n) est décroissante ;

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car $u_n\geqslant 0$) donc convergente.

<u>Remarque</u> (démonstration non demandée)

On veut démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Pour tout entier naturel non nul, f_n est dérivable sur [0;1]

$f'_n(x)=\dfrac{-(-ne^{1-x})}{(1+ne^{1-x})^2}=\dfrac{ne^{1-x}}{(1+ne^{1-x})^2}>0$ $\quad f_n$ est strictement croissante sur [0;1]

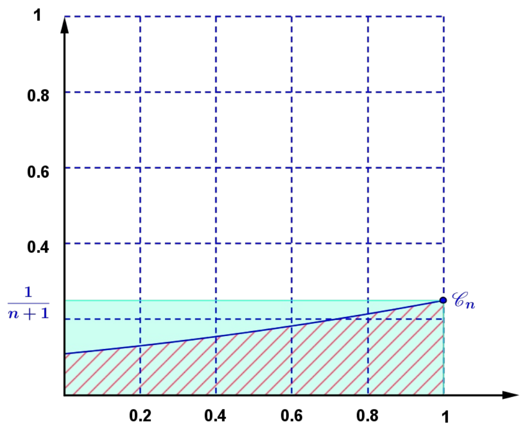
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1]

$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(1)=\dfrac{1}{1+ne^{1-1}}=\dfrac{1}{1+n}$

donc $0\leqslant u_n$ et l'aire u_n est inférieure à l'aire du rectangle de base 1 et de hauteur $\dfrac{1}{n+1}$.

et $0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{1+n}$ on joint une figure :

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés



$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés