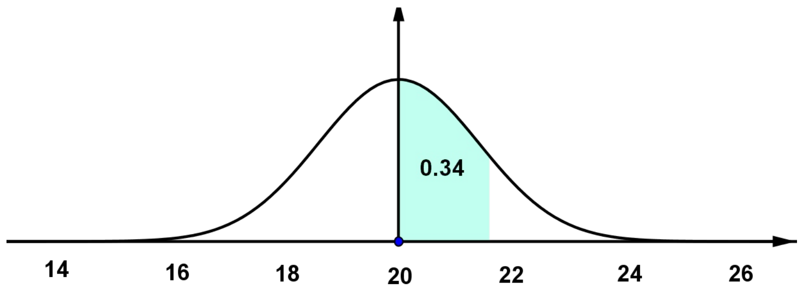
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'abscence de réponse n'est pas pénalisée.

. Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu=20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à 0,34.



Affirmation 1 :
La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23{,}2;+\infty[$ vaut environ 0,046.

. Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z=\dfrac{iz}{z-2}$

Affirmation 2 :
L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z|=1$ est une droite passant le point $A(1;0)$.

Affirmation 3 :
Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3}{4+6e^{-2x}}$

Affirmation 4 :
L'équation $f(x)=0{,}5$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 :
L'algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0
	Y prend la valeur $\dfrac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0{,}5$
	X prend la valeur X + 0,01
	Y prend la valeur $\dfrac{3}{4+e^{-2X}}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

CORRECTION

Affirmation 1 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ alors :
$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}68$ et $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0{,}954$

Conséquence

$P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=\frac{1}{2}\times 0{,}68=0{,}34$ et $P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times 0{,}954=0{,}477$

donc $P(\mu+2\sigma\leqslant X)=0{,}5-0{,}477=0{,}023$

Pour l'exemple :
$P(20\leqslant X\leqslant 21{,}6)=P(20\leqslant X\leqslant 20+1{,}6)=0{,}34$ donc $\sigma=1{,}6$
donc $P(23{,}2\leqslant X)=P(20+2\times 1{,}6\leqslant X)=0{,}023$ et non $0{,}046$.

Affirmation 2 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

$O(0)\quad B(2)\quad M(z)\quad Z=\frac{iz}{z-2}$

$$|Z|=\left|\frac{iz}{z-2}\right|=\frac{|iz|}{|z-2|}=\frac{|i|\times|z|}{|z-2|}=\frac{|z|}{|z-2|}=1\quad\Leftrightarrow |z|=|z-2|\quad\Leftrightarrow OM=BM$$

donc M appatient à la médiatrice du segment [O;B] or A est le milieu de [O;B] et la médiatrice de [O;B] passe par A.

Affirmation 3 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

z=x+iy et Z=X+iY x, y, X et Y sont desnombres réels

$$Z=\frac{i(x+iy)}{x+iy-2}=\frac{ix-y}{(x-2)+iy}=\frac{(-y+ix)((x-2)-iy)}{(x-2)^2+y^2}=\frac{-y(x-2)+xy+i(x(x-2)+y^2)}{(x-2)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{2y+i(x^2-2x+y^2)}{(x-2)^2+y^2}$$

Z est un imaginaire pur si et seulement si y = 0 et $x\neq 2$
Z est un imaginaire pur si et seulement si z est un réel différent de 2.

Affirmation 4 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3}{4+6e^{-2x}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{-3(-12e^{-2x})}{(4+6e^{-2x})^2}=\frac{36e^{-2x}}{(4+6e^{-2x})^2}>0$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$

Conséquence

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

Conséquence

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{4}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]0;\frac{3}{4}\right[$, 0,5 appartient à cet intervalle donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0,5 admet un unique antécédent α dans $\mathbb{R}$
c'est à dire que l'équation f(x)=0,5 admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	0.5	$\frac{3}{4}$

Affirmation 5 : $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$

0,54 est la valeur de sortie si et seulement si $f(0{,}54)>0{,}5$ et $f(0{,}53)<0{,}5$

Or en utilisant la calculatrice on obtient $f(0{,}54)=0{,}497$ à 10^{-3} près, et $f(0{,}54)<0{,}5$.