Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attrbué par réponse exacte justifiée.Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

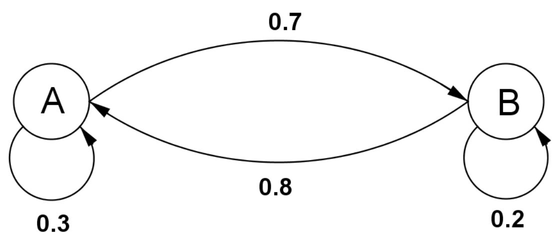
. On considère le système $\begin{cases} n \equiv 1 (5) \\ n \equiv 3 (4) \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

Affirmation 1 :
Si n est solution de ce système alors $n-11$ est divisible par 4 et par 5.

Affirmation 2 :
Pour tout entier relatif k, $11+20k$ est solution du système.

Affirmation 3 :
Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n=11+20k$.

. Un automate peut se trouver dans deux états A ou B, à chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes.
Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables : a et b sont des réels
Initialisation : a prend la valeur 0
b prend la valeur 1
Traitement : Pour k allant de 1 à 10
a prend la valeur 0,8a+0,3b
b prend lavaleur 1- a
Fin Pour
Sortie : Afficher a
Afficher b

Affirmation 4 :
En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10} .

Affirmation 5 :
Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.

CORRECTION

Affirmation 1 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

. $n\equiv 3 \pmod 4$ donc $n-11\equiv 3-11 \pmod 4$ et $n-11\equiv -8 \pmod 4$ soit $n-11\equiv 0 \pmod 4$
car $-8=-2\times 4$
Conséquence
n – 11 est divisible par 4.

. $n\equiv 1 \pmod 5$ donc $n-11\equiv 1-11 \pmod 5$ et $n-11\equiv -10 \pmod 5$ soit $n-11\equiv 0 \pmod 5$
car $-10=-2\times 5$
Conséquence
n – 11 est divisible par 5.

Affirmation 2 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Pour tout entier relatif k

. $11+20k=2+2\times 4+4\times(5k)$
$2\text{x}4\equiv 0 \pmod 4$ et $4\text{x}(5k)\equiv 0 \pmod 4$ donc $11+20k\equiv 3 \pmod 4$

. $11+20k=1+2\times 5+5\times(4k)$
$2\text{x}5\equiv 0 \pmod 5$ et $5\text{x}(4k)\equiv 0 \pmod 5$ donc $11+20k\equiv 1 \pmod 5$

Conséquence
donc 11+20k est solution du système.

Affirmation 3 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

Si n est un entier relatif solution dusystème alors n – 11 est divisible par 4 et par 5 donc il existe des entiers relatifs a et b tels que $n-11=4a=5b$.
4 divise 5b et 4 et 5 sont premiers entre eux , le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 4 divise b donc il existe un entier relatif k tel que b=4k.
Conséquence
Il existe un entier relatif k tel que $n-11=5\times 4k=20k$ soit $n=11+20k$.

Affirmation 4 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

L'arbre probabiliste permet d'affirmer que pour tout entier naturel n :
$a_{n+1}=0{,}3a_n+0{,}8b_n$ (et $b_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2b_n$).
Donc l'instruction à écrire à la cinquième ligne est :
a prend la valeur 0,3a+0,8b et non a prend la valeur 0,8a+0,3b .

Affirmation 5 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

$a_0=0$ et $b_0=1$
$a_1=0{,}3\times 0+0{,}8\times 1=0{,}8$ et $b_1=0{,}7\times 0+0{,}2\times 1=0{,}2$
$a_2=0{,}3\times 0{,}8+0{,}8\times 0{,}2=0{,}24+0{,}16=0{,}4$ et $b_2=0{,}7\times 0{,}8+0{,}2\times 0{,}2=0{,}56+0{,}04=0{,}6$
$a_3=0{,}3\times 0{,}4+0{,}8+0{,}6=0{,}12+0{,}48=0{,}6$ et $b_3=0{,}7\times 0{,}4+0{,}2\times 0{,}6=0{,}28+0{,}12=0{,}4$
$a_4=0{,}3\times 0{,}6+0{,}8\times 0{,}4=0{,}18+0{,}32=0{,}5$ et $b_4=0{,}7\times 0{,}6+0{,}2\times 0{,}4=0{,}42+0{,}08=0{,}5$

Conclusion
La probabilité que l'automate soit en l'état A au bout de 4 secondes est : 0,5.
La probabilité que l'automate soit en l'état B au bout de 4 secondes est : 0,5.