Exercice 5 3 points

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i}\, z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4+2\mathrm{i}$ et A le point d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entiernaturel n par : $u_n = z_n - z_A$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i})$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = z_n - z_A$ (donc $z_n = u_n + z_A$)

a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - 4 - 2i = \frac{1}{2} i (u_n + 4 + 2i) + 1 - 2i = \frac{1}{2} i \times u_n + 2i - 1 + 1 - 2i$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$$

b. Remarque

L'étude des suites géométriques dans l'ensembles des nombres n'est pas au programme de TS.
Alors on effectue un raisonnement par récurrence pour démontrer le résultat demandé.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n

$$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$$

Initialisation

$u_0 = z_0 - z_A = 0 - 4 - 2i = -4 - 2i$

On admet que $\left(\frac{1}{2} i\right)^0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2} i\right)^0 (-4-2i) = 1 \times (-4-2i) = -4-2i$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$ et on doit démontrer que $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2} i\right)^{n+1} (-4-2i)$;

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2} i\right) \times u_n = \left(\frac{1}{2} i\right) \times \left[\left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)\right] = \left(\frac{1}{2} i\right)^{n+1} (-4-2i)$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$$

2. $A(4+2i)$, $M_n(z_n)$ et $M_{n+4}(z_{n+4})$

$\overrightarrow{AM_n}(u_n)$ $\overrightarrow{AM_{n+4}}(u_{n+4})$

$$u_{n+4} = \left(\frac{1}{2} i\right)^{n+4} (-4-2i) = \left(\frac{1}{2} i\right)^4 \times \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i) = \left(\frac{1}{2} i\right)^4 u_n = \frac{1}{16} u_n$$

donc $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AM_n}$

Conclusion

Les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.