Exercice 1 — 6 points

Les parties A et B sont indépentantes

Partie A

Une boîte contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le châeau de saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boîte. Le tirage est considéré équiprobable et on note :
A l'événement « la médaille tirée est argentée ».
D l'événement « La médaille tirée est dorée ».
B l'événement « La médaille tirée représente le château de Blois ».
L l'événement « la médaille tirée représente le château de Langeais ».
S l'événement « La médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

a. Calculer la probabilité que la médaille soit argentée et représente le château de Langeais.

b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.

c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit argentée.

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles, dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart type $\sigma = 0{,}06$.
On note C l'événement « la médaille est conforme ».
Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart type σ.

a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?

b. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

CORRECTION

Partie A

« Une boîte contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées »

Donc $P(A)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}=0{,}25$

$P(D)=P(\bar{A})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75$

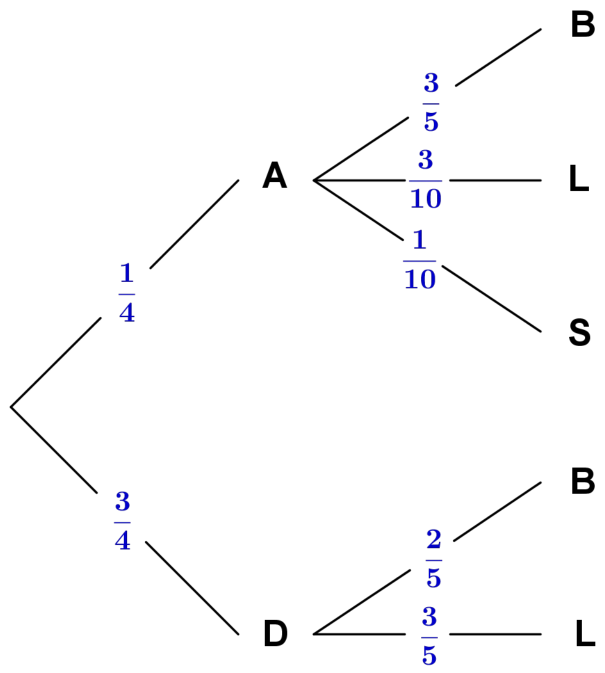
« Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les aures le château de Saumur ».

Donc $P_A(B)=0{,}6=\frac{3}{5}$ $P_A(L)=0{,}3=\frac{3}{10}$ $P_A(S)=1-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}=0{,}1$

« Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais »

Donc $P_D(B)=0{,}4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ et $P_D(L)=1-0{,}4=0{,}6=\frac{3}{5}$

On construit l'arbre pondéré



1.a On nous demande de calculer : $P(A\cap L)$

$P(A\cap L)=P(A)\times P_A(L)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{40}$

b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.

$P(L)=P(A\cap L)+P(D\cap L)$

$P(D\cap L)=P(D)\times P_D(L)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}=\frac{18}{40}$

$P(L)=\frac{3}{40}+\frac{18}{40}=\frac{21}{40}$

c. On nous demande $P_L(D)=\frac{P(D\cap L)}{P(L)}$

$$P_L(D)=\frac{\frac{18}{40}}{\frac{21}{40}}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$

2. On nous demande $P_S(A)$
Seules les médailles argentées représentent le château de Saumur donc $P_S(A)=1$.
Ou $P(S)=P(A\cap S)+P(D\cap S)$ or $P(D\cap S)=0$ et $P(S)=P(A\cap S)$
$P_S(A)=1$

Partie B

1. La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu=10$ et d'écart type $\sigma=0{,}06$.
La médaille est conforme si et seulement si $9{,}9\leqslant X\leqslant 10{,}1$.
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(9{,}9\leqslant X\leqslant 10{,}1)$ = **0,904** à 10^{-3} près.

2. La variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu=10$ et d'écart type σ .

a. La variable aléatoire $Z=\frac{Y-10}{\sigma}$ suit la loi normale centrée et réduite.

b. $(9{,}9\leqslant Y\leqslant 10{,}1)\Leftrightarrow\left(\frac{-0{,}1}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{0{,}1}{\sigma}\right)$

On veut $P(9{,}9\leqslant Y\leqslant 10{,}1)=1-0{,}06\Leftrightarrow P\left(\frac{-0{,}1}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{0{,}1}{\sigma}\right)=0{,}94$

On a $P\left(Z\leqslant\frac{0{,}1}{\sigma}\right)=P(Z\leqslant 0)+\frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}1}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{0{,}1}{\sigma}\right)=0{,}5+\frac{1}{2}\times 0{,}94=0{,}97$

On utilise la calculatrice pour déterminer le nombre a tel que : $P(Z\leqslant a)=0{,}97$
On obtient : a = 1,8881
et $\frac{0{,}1}{\sigma}=1{,}8881$ $\sigma=\frac{0{,}1}{1{,}8881}$ = **0,056** à 10^{-3} près.