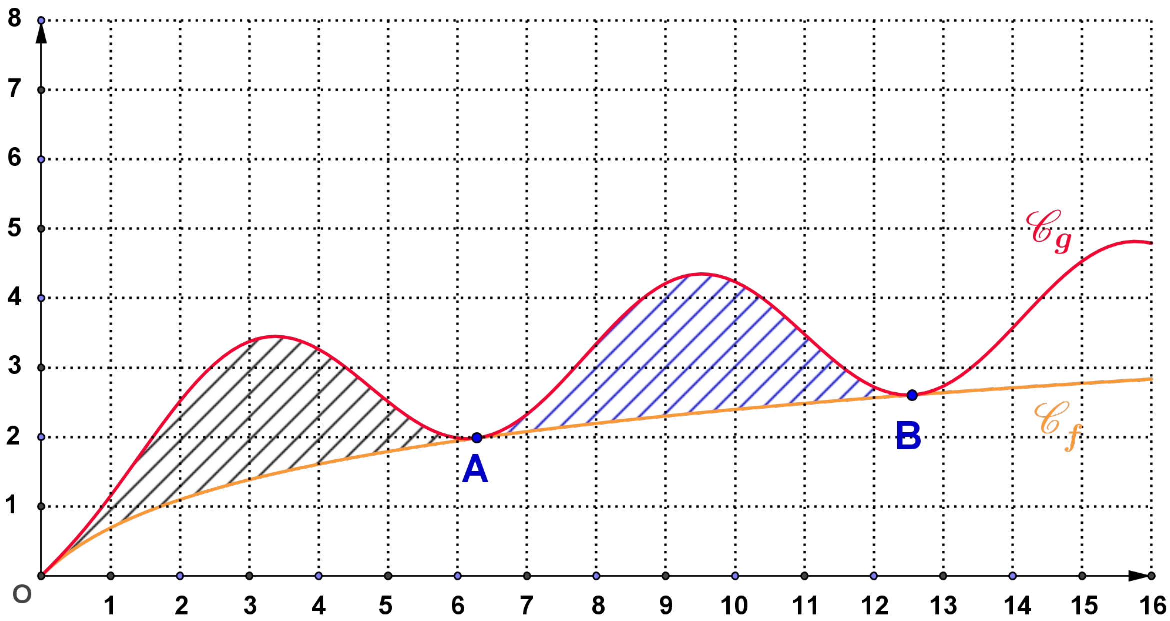
Exercice 2 — 3 points

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0;16] par
$f(x)=\ln(x+1)$ et $g(x)=\ln(x+1)+1-\cos(x)$
Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données en **annexe 1.**
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

ANNEXE 1



CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;16]

$f(x)=\ln(x+1)$ et $g(x)=\ln(x+1)+1-\cos(x)$

$g(x)-f(x)=1-\cos(x)\geqslant 0$

On détermine les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$g(x)=f(x)\Leftrightarrow 1-\cos(x)=0\Leftrightarrow \cos(x)=1$

donc $x=2k\pi$ (k entier relatif) et $0\leqslant x\leqslant 16$

. Pour k=0 x=0 $O(0;0)$

. Pour k=1 $x=2\pi$ $A(2\pi;\ln(2\pi+1))$

. Pour k=2 $x=4\pi$ $B(4\pi;\ln(4\pi+1))$

Si $k\geqslant 3$ alors $x>16$

L'aire (en U.A.) de la première surface hachurée est l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ cette aire est égale à : $\int_0^{2\pi}(g(x)-f(x))dx = \int_0^{2\pi}(1-\cos(x))dx$

$h(x)=1-\cos(x)$ $H(x)=x-\sin(x)$

H est une primitive de h sur [0;16]

$\int_0^{2\pi}(1-\cos(x))dx = (2\pi)-H(0)=2\pi-\sin(2\pi)-0+\sin(0)=2\pi$ (U.A.)

L'aire (en U.A.) dela deuxième surface hachurée est l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[2\pi;4\pi]$, cette aire est égale à : $\int_{2\pi}^{4\pi}(g(x)-f(x))dx = \int_{2\pi}^{4\pi}(1-\cos(x))dx$

$= F(4\pi)-F(2\pi)=4\pi-\sin(4\pi)-2\pi+\sin(2\pi)=4\pi-2\pi=2\pi$

<u>Conclusion</u>

Les deux surfaces hachurées ont la même aire.