Exercice 3 6 points

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m le plan P_m d'équation : $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $A(1;1;1)$ appartient-il au plan P_m ?

2. Montrer que les plan P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d)\quad \begin{cases} x=12-2t \\ y=9-2t \\ z=t \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

3.a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

b. Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m .

c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que :
$-10\leqslant m\leqslant 10$ et $-10\leqslant m'\leqslant 10$
On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si :

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)(m'-1)+\frac{mm'}{4}=0$$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables : m et m' sont des entiers relatifs
Traitement : Pour m allant de -10 à 10 :
  Pour m' allant de -10 à 10
    Si $(mm')^2+16(m-1)(m'-1)+4mm'=0$
      Alors Afficher $(m;m')$
  Fin du Pour
Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

d. Cet algorithme affiche des couples d'entiers dont $(-4;1)$, $(0;1)$ et $(5;-4)$.
Ecrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

CORRECTION

Pour tout nombre réel m, le plan P_m a pour équation : $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$.

1. Le point A appartient au plan P_m si et seulement si : $\frac{1}{4}m^2\times 1+(m-1)\times 1+\frac{1}{2}m\times 1-3=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2+m-1+\frac{1}{2}m-3=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m-4=0 \Leftrightarrow m^2+6m-16=0$

$\Delta=36-4\times(-16)\times 1=36+64=100=10^2$

$m'=\frac{-6-10}{2}$ = -8 et $m''=\frac{-6+10}{2}=2$

Le point $A(1;1;1)$ Appartient au plan P_m si et seulement si m = **-8** ou m = **2.**

2. P_1 **:** $\frac{1}{4}x+0\times y+\frac{1}{2}z-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1$ **:** $x+2z-12=0$

P_{-4} **:** $4x-5y-2z-3=0$

Pour déterminer l'intersection des plans P_1 et P_{-4}, on résout le système : $\begin{cases} x+2z-12=0 \\ 4x-5y-2z-3=0 \end{cases}$

On pose $z=t$ (t nombre réel)

on obtient $x=2t-12$

et on détermine y dans l'autre équation :

$5y=4x-2z-3=4(-2t+12)-2t-3=-8t+48-2t-3=-10t+45$

$y=-2t+9$

On obtient pour représentation paramétrique de la droite (d) : $\begin{cases} x=-2t+12 \\ y=-2t+9 \\ z=t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

3.a. P_0 a pour équation cartésienne $-y-3=0$.

Pour déterminer l'intersection de P_0 et (d) ou résout le système : $\begin{cases} -y-3=0 \\ x=-2t+12 \\ y=-2t+9 \\ z=t \end{cases}$

On obtient $-3=-2t+9 \Leftrightarrow 2t=12 \Leftrightarrow t=6$

et $x=-2\times 6+12=0$; $y=-3$; $z=6$.

P_0 et (d) sont sécants en $B(0;-3;6)$

b. Pour tout nombre réel m : $m^2\times 0+(m-1)\times(-3)+\frac{1}{2}m\times 6-3=0\times m^2-3m+3+3m-3$

$=0\times m^2+0\times m+0=0$

Donc le point B appartient au plan P_m pour toute valeur de m.

c. Tout point appartenant à tous les plans P_m, appartient aux plans P_1 et P_{-4} donc à leur droite d'intersection (d). le point considéré appartient aussi au plan P_0 donc à l'intersection de P_0 et (d) soit {B}.

Conclusion

B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m .

4.a. P_1 **:** $x+2z-12=0$ $\qquad \vec{N_1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P_1 .

P_{-4} : $4x-5y-2z-3=0$ $\overrightarrow{N_{-4}}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P_{-4}

P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_{-4}}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_{-4}}=1\times4+0\times(-5)+2\times(-2)=4-4=0$
donc les plans P_1 et P_{-4} sont orthogonaux.

b. P_m **:** $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$ $\overrightarrow{N_m}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m^2\\m-1\\\frac{1}{2}m\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P_m.

$P_{m'}$: $\frac{1}{4}m'^2x+(m'-1)y+\frac{1}{2}m'z-3=0$ $\overrightarrow{N_{m'}}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}m'^2\\m'-1\\\frac{1}{2}m'\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $P_{m'}$.

P_m et $P_{m'}$ sont perpendilaires si et seulement si $\overrightarrow{N_m}\cdot\overrightarrow{N_{m'}}=0$
$\overrightarrow{N_m}\cdot\overrightarrow{N_{m'}}=\frac{1}{16}m^2m'^2+(m-1)(m'-1)+\frac{1}{4}mm'=0$
$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)(m'-1)+\frac{mm'}{4}=0$

c. Cet algorithme, permet de déterminer les couples d'entiers relatifs $(m;m')$ vérifiant $-10\leqslant m\leqslant10$ et $-10\leqslant m'\leqslant10$ tels que P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

d. Remarque
P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si seulement si $P_{m'}$ et P_m sont perpendiculaires (et on ne peut pas avoir $m=m'$).
Conséquence
Si le couple $(a;b)$ est solution alors le couple $(b;a)$ est aussi solution.

Les six couples affichés par l'algorithme sont donc :
$(-4;1)$; $(0;1)$; $(5;-4)$;$(1;-4)$; $(1;0)$ et $(-4;5)$.
Ranger dans d'affichage (ordre lexicographique)
$(-4;1)$; $(-4;5)$;$(0;1)$; $(1;-4)$; $(1;0)$ et $(5;-4)$.