Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n .$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1.a. Vérifier que : $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$

b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$

b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a. Interpréter géomètriquement d_n.

b. Calculer d_0.

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n) .$$

d. En déduire que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier naturel n :

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

4.a. Montrer que pour tout entier naturel n,

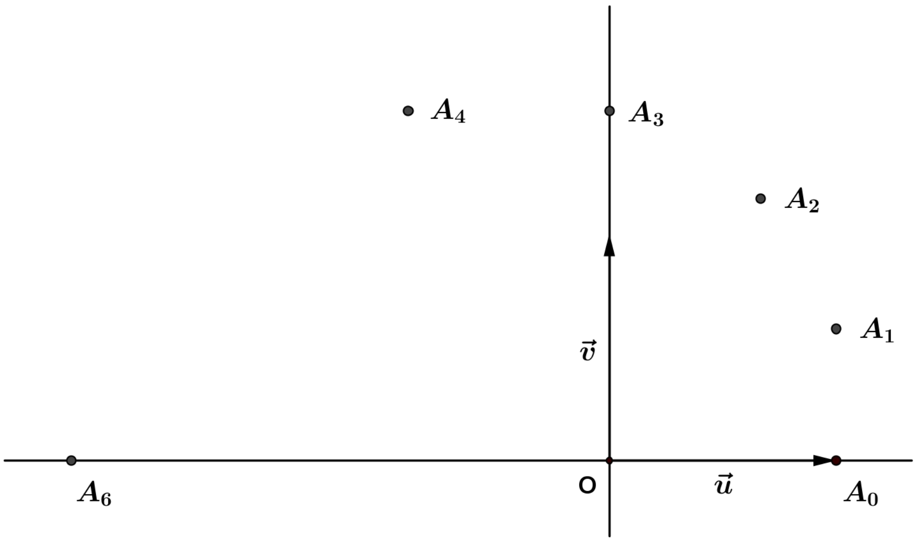
$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^{\ 2}$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

d. Justifier cette construction.

ANNEXE 2



CORRECTION

$z_0=1$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$.

1.a. $\left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|^2=1+\dfrac{3}{9}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$ donc $\left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

et $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)$

$\arg(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\theta(2\pi)$

$\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{1}{2}$

donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$

<u>Conséquence</u>

$1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

b. $z_1=\left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_0=\left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times 1=1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2=\left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_1=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{6}}=\dfrac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

<u>Initialisation</u>

Pour $n=0$ $z_0=1$ et $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{i\times 0\times\frac{\pi}{6}}=1$

La propriété est vérifiée pour $n=0$

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ et on doit démontrer que $z_{n+1}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$.

Or $Z_{n+1}=\left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$

b. $\overrightarrow{OA_0}(z_0)$ $\overrightarrow{OA_n}(z_n)$

$\arg z_0=0 \quad (2\pi)$ $\quad (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA_0})=0 \quad (2\pi)$

$\arg z_n=n\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$ $\quad (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA_n})=n\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_n})=n\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$

Les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_n})=0 \quad (2\pi)$ ou $(\overrightarrow{OA_0}\ ;\ \overrightarrow{OA_n})=\pi \quad (2\pi)$.

Soit $n\dfrac{\pi}{6}=0 \quad +2k\pi$ ou $n\dfrac{\pi}{6}=0 \quad +2k\pi$ (k entier relatif)

$n = 12k$ ou $n = 6+12k$
c'est à dire n est un multiple de 6.

3.a. Pour tout entier naturel n
$d_n = |z_{n+1} - z_n|$ $\quad A_{n+1}(z_{n+1})$ $\quad A_n(z_n)$ donc $d_n = A_n A_{n+1}$

b. $d_0 = A_1 A_0 = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c. Pour tout entier naturel n
$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$$

d. $|z_{n2} - z_{n+1}| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n|$

Soit $d_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n$

donc (d_n) est la suite géométrique de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et pour tout entier naturel n, $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4.a. $|z_n|^2 = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]^2 = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

$|z_{n+1}|^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$

$d_n^{\ 2} = \frac{3}{9} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$

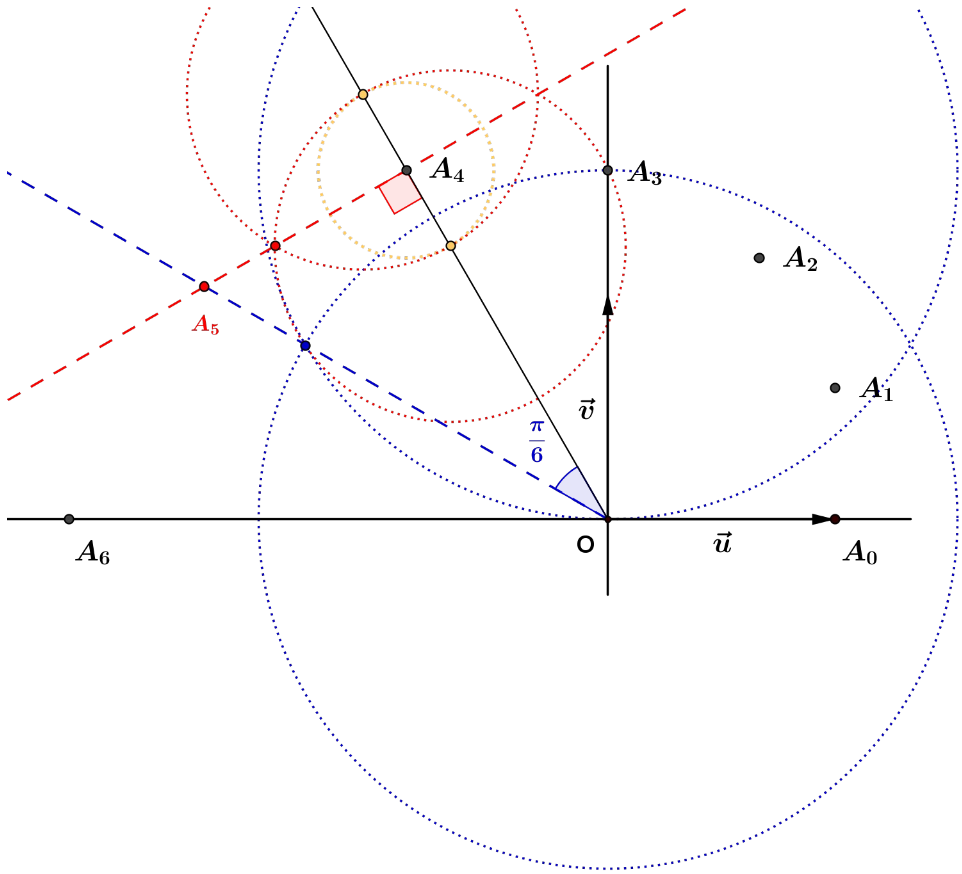
$$|z_n|^2 + d_n^{\ 2} = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} = |z_{n+1}|^2$$

donc $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^{\ 2}$

b. $|z_{n+1}|^2 = O A_{n+1}^2$
$|z_n|^2 = OA_n^2$
$d_n^2 = A_n A_{n+1}^2$
$A_n A_{n+1}^2 + OA_n^2 = OA_{n+1}^2$

La réciproque du théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n .

c.



d. On doit construire le point A_5 tel que le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 et $(\overrightarrow{OA_4}\ ;\ \overrightarrow{OA_5}) = \frac{\pi}{6}\quad (2\pi)$.

. <u>Constrction proposée</u>
On construit un triangle équilatéral dont l'un des côtés est OA_3
et on a $(\overrightarrow{OA_3};\overrightarrow{OA_4}) = \frac{\pi}{6}\quad (2\pi)$.
Puis on construit la perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4 .
On obtient A_5 (intersection de deux droites).