Exercice 1 5 points

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, de deux fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$.
On considère les points $A(0,5;1)$ et $B(0;-1)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la doite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x)=(ax+b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x)=2xe^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$.

2.a. On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\frac{2}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2.b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

3. La fonction g donc la courbe représente $\mathscr{C}_g$ passe par le point $B(0;-1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

3.a. Déterminer l'expression de g(x).

3.b. Soit m un réel strictement positif.

Calculer $I_m=\int_0^m f(t)\,dt$ en fonction de m.

3.c. Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} I_m$

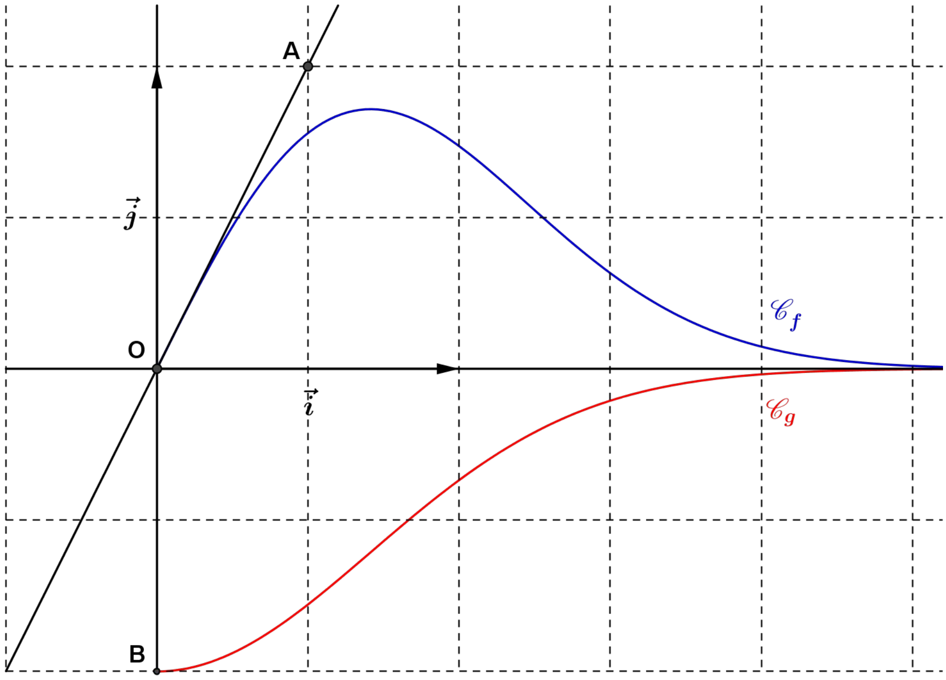
4.a. Justifier que f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

4.b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout nombre réel x de $[0;+\infty[$, $P(X\leqslant x)=g(x)+1$.

4.c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X\leqslant\alpha)=0,5$

4.d. Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe le point de coordonnées $(\alpha;0)$ en laissant apparent les traits de construction.
Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X\leqslant\alpha)$.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=(ax+b)e^{-x^2}$.

Le point $O(0;0)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f donc $f(0)=0$.

$(a\times 0+b)e^0=0 \Leftrightarrow b\times 1=0 \Leftrightarrow b=0$.

$f(x)=axe^{-x^2}$

La droite (OA) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $O(0;0)$ donc le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $f'(0)$.

$A(0,5;1) \quad m=\dfrac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\dfrac{1-0}{0,5-0}=\dfrac{1}{0,5}=2$

$(e^{-x^2})'=-2xe^{-x^2} \quad f(x)=axe^{-x^2}$

$f'(x)=ae^{-x^2}+ax(-2xe^{-x^2})=(a-2ax^2)e^{-x^2}$

$f'(0)=ae^0=a$

donc $a=2$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=2xe^{-x^2}$

2.a. On admet que pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x)=\dfrac{2}{x}\times\dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X} = 0.$

Conséquence

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$

Conclusion

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(x)=(2-4x^2)e^{-x^2}$ et $e^{-x^2}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe $(2-4x^2)$.

$2-4x^2=(\sqrt{2}-2x)(\sqrt{2}+2x)$

Si $0\leqslant x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $0<f'(x)$

Si $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x$ alors $f'(x)<0$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	↘	0

$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{e}} = 0,86$ à 10^{-2} près.

3.a. g est une primitive de f sur $[0;+\infty[$

$f(x)=2xe^{-x^2}=-(-2x)e^{-x^2}$

$u(x)=-x^2$ et $u'(x)=-2x$

et la fonction F, définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=-e^u=-e^{-x^2}$, est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

Donc, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $g(x)=-e^{-x^2}+K$ (K constante réelle).

Or $g(0)=-1$ et $g(0)=-e^0+K=-1+K$, on obtient $K=0$.

<u>Conclusion</u>

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(x)=-e^{-x^2}$.

3.b. m est un nombre réel strictement positif.

$$I_m=\int_0^m f(t)\,dt=g(m)-g(0)=-e^{-m^2}-(-e^0)=1-e^{-m^2}$$

3.c. $\lim\limits_{m\to+\infty} -m^2=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{-m^2}=0$.

<u>Conclusion</u>

$\lim\limits_{m\to+\infty} I_m=\mathbf{1}$

4.a. Le tableau de variation de f nous permet d'affirmer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $f(x)\geqslant 0$.

. f est continue sur $[0;+\infty[$

. L'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est égale à 1.

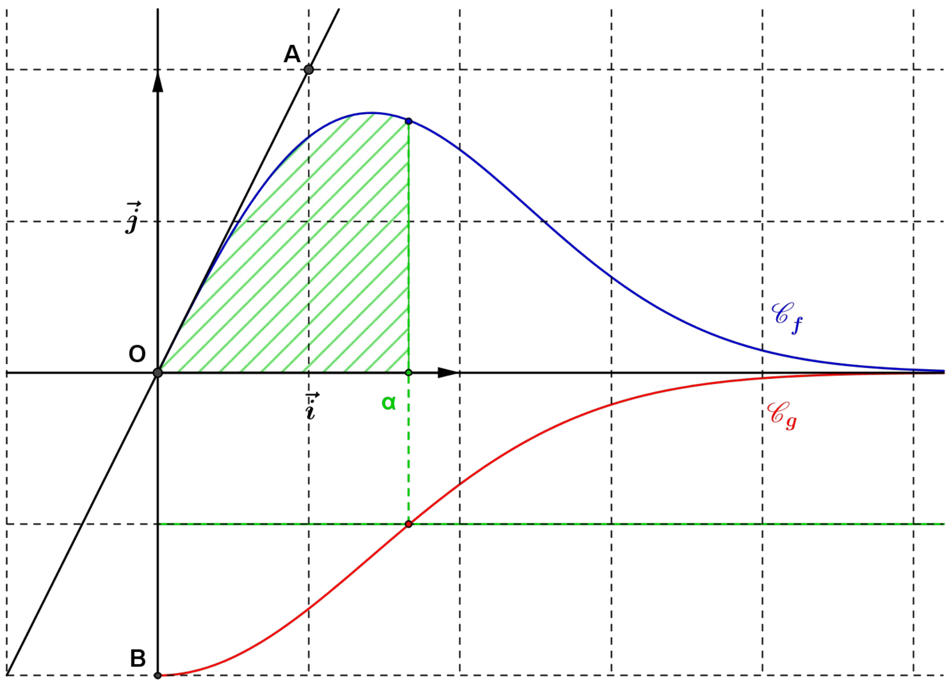
Donc f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

4.b. Si X est la variable aléatoire continue qui admet f pour fonction de densité sur $[0;+\infty[$ alors pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$: $P(X\leqslant x)=\int_0^x f(t)\,dt=g(x)-g(\{0\})=$ **g(x)+1.**

4.c. $P(X\leqslant\alpha)=0{,}5=g(\alpha)+1 \Leftrightarrow g(\alpha)=-0{,}5 \Leftrightarrow -e^{-\alpha^2}=-0{,}5 \Leftrightarrow e^{-\alpha^2}=0{,}5$

$\Leftrightarrow -\alpha^2=\ln(0{,}5)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2) \Leftrightarrow \alpha^2=\ln(2) \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{\ln(2)}$ car $\alpha\geqslant 0$

4.d.



On a $g(\alpha)=-0{,}5$ donc α estl'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite d'équation $y=-0{,}5$.

$P(X\leqslant\alpha)$ est l'aire, en unité d'aire de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$ (aire de la partie de plan hachurée en vert sur le dessin).