Exercice 2 3 points

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il es attribué ***un point par réponse exacte correctement justifiée.***
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|z-4|=|z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)(z^2-8z+25)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\frac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3}-i)^8$.

CORRECTION

Proposition 1 **VRAIE**

Justification

Dans le plan complexe, on considère les points $A(3i)$, $B(4)$, $C(-2i)$ et $M(z)$.

$\overrightarrow{BM}(z-4)$ donc $BM=|z-4|$ et $\overrightarrow{CM}(z+2i)$ donc $CM=|z+2i|$

$|z-4|=|z+2i| \Leftrightarrow BM=CM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice Δ de [BC]

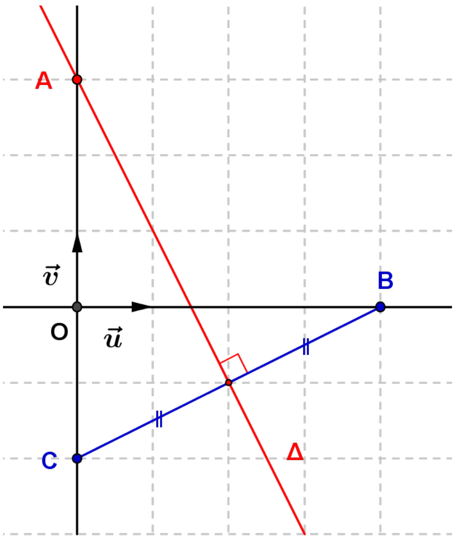
$\overrightarrow{AB}(4-3i)$ $AB^2=16+9=25$ donc $AB=5$

$\overrightarrow{AC}(-2i-3i)$ $\overrightarrow{AC}(-5i)$ donc $AC=5$

$AB=AC$ donc le point A appartient à la médiatrice Δ de [BC].

Conclusion

L'ensemble des points M(z) tels que |z-4|=|z+2i| est la droite Δ passant par A.



Proposition 2 **VRAIE**

Justification

$z-1=0 \Leftrightarrow z=1$

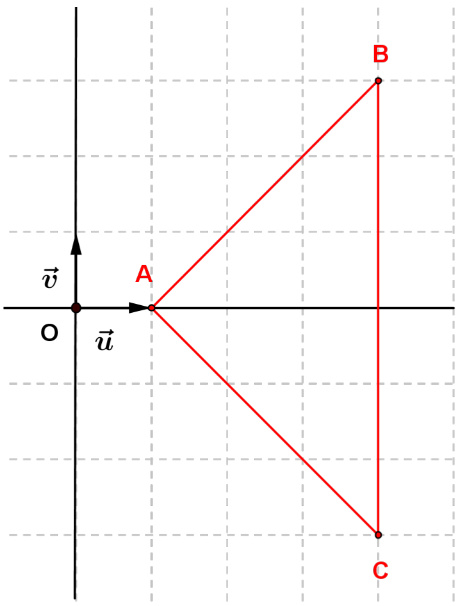
$z^2-8z+25=0$

$\Delta=64-4\times25=-36=(6i)^2$

$z_1=\dfrac{8-6i}{2}=4-3i$ et $z_2=\dfrac{8+6i}{2}=4+3i$

$\mathscr{S}=\{1;4-3i;4+3i\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (E) $(z-1)(z^2-8z+25)=0$.

Dans le plan complexe on considère les points $A(1)$; $B(4+3i)$ et $C(4-3i)$.



Le triangle ABC est isocèle car les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc si le triangle ABC est rectangle alors il est rectangle en A.

$\overrightarrow{AB}(3+3i)$ $\overrightarrow{AC}(3-3i)$ $\overrightarrow{BC}(-6i)$

$AB^2=AC^2=9+9=18$ $BC^2=6^2=36$.

On a donc $AB^2+AC^2=18+18=36=BC^2$.

La réciproque du théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le triangle ABC est rectangle en A.

Proposition 3 **FAUSSE**

Justification

$(-\sqrt{3}+i)^2=3-1-2\sqrt{3}i=2-2\sqrt{3}i$

$(-\sqrt{3}+i)^4=(2-2\sqrt{3}i)^2=4-12-8\sqrt{3}i=-8-8\sqrt{3}i$

$$(-\sqrt{3}+i)^8=(-8-8\sqrt{3}i)^2=64-64\times3+128\sqrt{3}i=128(-1+\sqrt{3}i)=256\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Si θ est unargument de $(-\sqrt{3}+i)^8$ alors $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta\equiv\frac{2\pi}{3}(2\pi)$

Conclusion

$\frac{\pi}{3}$ **n'est pas un argument de** $(-\sqrt{3}+i)^8$ **.**