Exercice 3 — 3 points

La suite (u_n) est définie par :

$u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$.

1.a. A l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

1.b. En déduire la limite ℓ de la suite (u_n).

2. Compléter, dans l'ANNEXE, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que : $|u_{n+1}-u_n|\leqslant 10^{-3}$.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Variables :	n, a et b sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 0,5
Traitement :	Tant que | b - a | . . . . .
	n prend la valeur . . . . .
	a prend la valeur . . . . .
	b prend la valeur . . . . .
	Fin Tant que
Sortie	Afficher . . . . .

CORRECTION

(u_n) est la suite définie par : $u_0=0$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$.

1.a. $u_1=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$

$u_2=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ $u_3=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$ $u_4=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{4}{5}$

Conjecture

Pour tout entier naturel n $u_n=\frac{n}{n+1}$.

Démonstration de la conjecturer

On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $u_n=\frac{n}{n+1}$.

. Initialisation

Pour $n=0$ $\frac{0}{0+1}=0$ et $u_0=0$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

. Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire , pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n=\frac{n}{n+1}$ et on doit démontrer que $u_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$.

Or

$$u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{2(n+1)-n}=\frac{n+1}{n+2}$$

. Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $u_n=\frac{n}{n+1}$.

1.b. Pour tout entier naturel n :

$$u_n=\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=$ **1.**

2.

Variables :	n, a et b des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 0,5
Traitement :	Tant que **| b-a | >** 10^{-3}
	n prend la valeur **n+1**
	a prend la valeur **b**
	b pend la valeur $\frac{1}{2-b}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher **n**