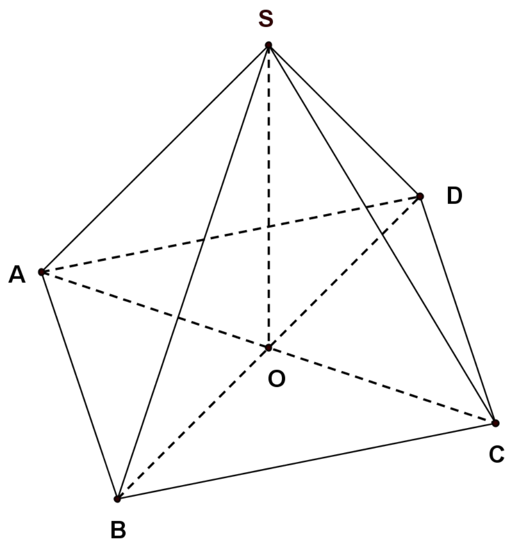
Exercice 4 — 4 points

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-dessous.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.
On admettra OS = OA.



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère
On considère le repère orthonormé $(0;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OS})$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments (AS) et (BS).
1.a. Justifier que $\vec{n}(1;1;-3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).
1.b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQC)

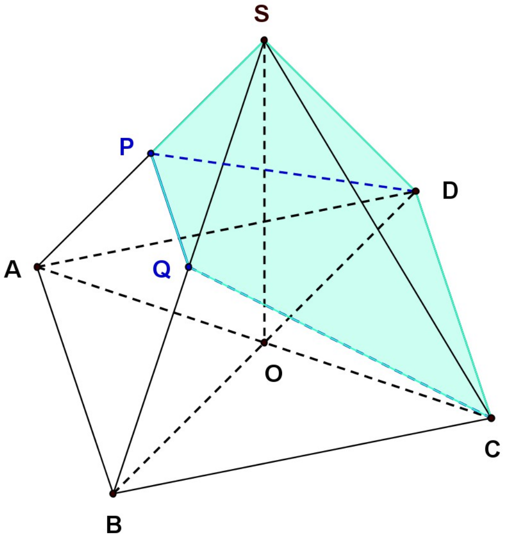
2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).
2.a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).
2.b. Calculer les coordonnées du point H.
2.c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur,est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$.

Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet.
C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête , parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui sembient pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A : calcul d'un volume sans repère

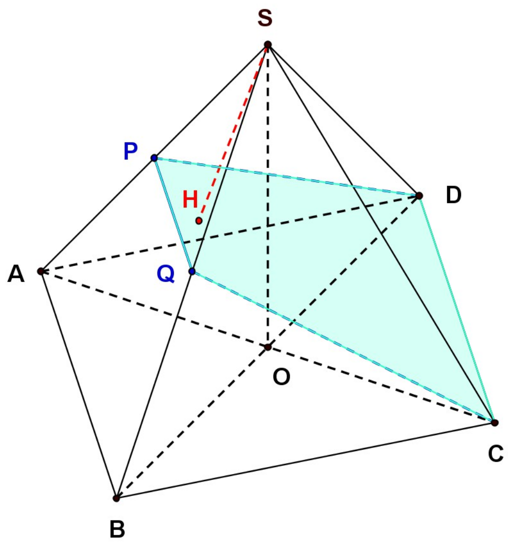
1. SA = SB donc le triangle SAC est isocèle de sommet principal S.
O est lemilieu de [AC] donc (SO) est la médiane du triangle SAC issue de S et (SO) est aussi la hauteur issue de S.
Conséquence
Les droites (SO) et (AC) sont orthogonales.

On démontre de même que (SO) et (BD) sont orthogonales.
(SO) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc **la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).**
Conséquence
SO est la hauteur de la pyramide SABCD issue de S.

2. Le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD est $\frac{1}{3}\mathscr{B}$ x h
h est la hauteur, en cm, de la hauteur de la pyramide et $\mathscr{B}$ est l'aire, en cm^2, de la base.
$h=SO=OA=\frac{24}{2}=12\,cm$
L'aire, en cm^2 du carré ABCD est égale à $BD\times AO=24\times 12=288\,cm^2$.
Le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD est : $\frac{1}{3}\times 288\times 12=288\times 4$ = **1152** cm^3

Partie B : dans un repère

$(O;\vec{OA};\vec{OB};\vec{OS})$ est un repère orthonormé de l'espace.



$O(0;0;0)$; $A(1;0;0)$; $B(0;1;0)$; $C(-1;0;0)$;$D(0;-1;0)$ et $S(0;0;1)$

1.a. P est le milieu de [AS] donc $P(0,5;0;0,5)$.
Q est le milieu de [BS] donc $Q(0;0,5;0,5)$.
$C(-1;0;0)$
$\vec{PQ}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$ $\vec{PC}\begin{pmatrix}-1,5\\0\\-0,5\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$
$\vec{n}.\vec{PQ}=1\times(-0,5)+1\times 0,5+(-3)\times 0=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{PC}=1\times(-1,5)+1\times 0+(-3)\times(-0,5)=0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQC) donc $\vec{n}$ **est unvecteur normal au plan (PQC).**

1.b. $M(x;y;z)$ appartient au plan (PQC) $[\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\vec{n}=0$

$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x-0,5 \\ y-0 \\ z-0,5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$(x-0,5)\times 1+y\times 1+(z-0,5)\times(-3)=0 \Leftrightarrow x-0,5+y-3z+1,5=0$

(PQC) : x+y-3z+1=0

2.a. (SH) est la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par S.

$S(0;0;1)$ $\quad \vec{n}(1;1;-3)$

$$(SH) : \begin{cases} x= t \\ y= t \\ z=-3t+1 \end{cases} \quad \text{t décrit } \mathbb{R}$$

2.b. Pour déterminer les coordonnées du point H, on résout le système :

$$\begin{cases} x+y-3z+1= 0 \\ x= t \\ y= t \\ z=-3t+1 \end{cases}$$

donc $t+t-3(-3t+1)+1=0 \Leftrightarrow 11t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{11}$

On obtient $x=y=\frac{2}{11}$ et $z=-\frac{6}{11}+1=\frac{5}{11}$

$H\left(\frac{2}{11};\frac{2}{11};-\frac{6}{11}\right)$

$\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix} \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ -\frac{6}{11} \end{pmatrix}$ $\quad SH^2=\frac{4}{121}+\frac{4}{121}+\frac{36}{121}=\frac{44}{121}=\frac{4\times 11}{121}$ $\quad SH=\frac{2\sqrt{11}}{11}$ (en unité de longueur)

3. On admet que l'aire, en unité d'aire,du quadrilatère PQCD est $\frac{3\sqrt{11}}{8}$.

Le volume, en unité de volume, de la pyramide SPQCD est $\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{11}}{8}\times\frac{2\sqrt{11}}{11}=\frac{8\times 11}{24\times 11}=\frac{1}{4}$

Partie C : partage équitable

L'unité de longueur est OA qui est égale à 12 cm.

L'unité de volume est donc égale à $12^3=1728\,cm^3$.

Le volume, en cm^3, de la pyramide SPQCD est égal à $\frac{1278}{4}=$ **432** cm^3 **.**

La moitié du volume de la pyramide SABCD, en cm^3 est égale à $\frac{1152}{2}=$ **576** cm^3 **.**

432 est différent de 576 donc le partage n'est pas équitable et Fanny a raison d'avoir des doutes.