

Exercice 5 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité* **5 points**

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4} .

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Etude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart-type σ .

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geq 48) = 0,7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2,4$

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.
3. Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore 6 mois.

Partie B : Etude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Déterminer la valeur exacte de λ , sachant que le service statistique indique que $P(0 \leq T \leq 24) = 0,03$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,00127$

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 28 mois.
- 3.a. Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :
 $P_{(T > t)}(T \geq t+h) = P(T \geq h)$, c'est à dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.
- 3.b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les événements $(D \geq 48)$ et $(T \geq 48)$ sont indépendants. Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.

Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que : $P(D \geq 48) = 0,7977$? Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A : Etude des pannes du module mécanique

1. La variable aléatoire D suit la loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart-type σ , donc la variable aléatoire $\frac{D-50}{\sigma}$ suit la loi normale centrée et réduite.

$$P(D \geq 48) = P\left(\frac{D-50}{\sigma} \geq \frac{48-50}{\sigma}\right) = 0,7977$$

$$P\left(\frac{D-50}{\sigma} \geq -\frac{2}{\sigma}\right) = 0,7977$$

En utilisant la calculatrice pour la loi normale centrée et réduite, on détermine le nombre réel a tel que :

$$P\left(\frac{D-50}{\sigma} \geq a\right) = 0,7977$$

On obtient $a = -0,8334$ à 10^{-4} près.

$$\text{Donc } -0,8334 = -\frac{2}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = \frac{2}{0,8334} = \mathbf{2,3998} \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

2. La variable aléatoire D suit la loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart-type $\sigma=2,4$.
On nous demande de calculer $P(45 \leq D \leq 52)$.

En utilisant la calculatrice on obtient $P(45 \leq D \leq 52) = \mathbf{0,7791}$ à 10^{-4} près.

3. On nous demande de calculer $P_{(D \geq 48)}(D \geq 54)$

$$P_{(D \geq 48)}(D \geq 54) = \frac{P((D \geq 48) \cap (D \geq 54))}{P(D \geq 48)} = \frac{P(D \geq 54)}{P(D \geq 48)} = \frac{0,0478}{0,7877} = \mathbf{0,0599} \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Partie B : Etude des pannes d'origine électronique

1. La variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ .

$$\text{Donc } P(0 \leq T \leq 24) = \int_0^{24} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-24\lambda} = 0,03 \Leftrightarrow e^{-24\lambda} = 0,97 \Leftrightarrow -24\lambda = \ln(0,97)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,97)}{24} \text{ (= } \mathbf{0,00127} \text{ à } 10^{-5} \text{ près)}$$

2. $P(24 \leq T \leq 28) = e^{-24 \times 0,00127} - e^{-28 \times 0,00127} = \mathbf{0,0291}$ à 10^{-4} près.

3.a. Pour tout nombre réel positif ou nul a : $P(T \geq a) = e^{-a\lambda}$

t et h sont deux nombres réels positifs.

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P((T \geq t) \cap (T \geq t+h))}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-(t+h)\lambda}}{e^{-t\lambda}} = \frac{e^{-t\lambda} \times e^{-h\lambda}}{e^{-t\lambda}} = e^{-h\lambda} = P(T \geq h)$$

Donc **une loi exponentielle est une loi sans vieillissement.**

3.b. $P_{(T \geq 36)}(T \geq 36+12) = P(T \geq 12) = e^{-12 \times 0,00127} = \mathbf{0,9849}$ à 10^{-4} près.

Partie C : Panne d'origine mécanique et électrique

On nous demande de calculer $P((D \geq 48) \cap (T \geq 48))$

Les événements $(D \geq 48)$ et $(T \geq 48)$ sont indépendants.

Donc $P((D \geq 48) \cap (T \geq 48)) = P(D \geq 48) \times P(T \geq 48) = 0,7977 \times e^{-48 \times 0,00127} = 0,7977 \times 0,9409 = \mathbf{0,7505}$ à 10^{-4} près.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

$$P(D \geq 48) = 0,7977 = p$$

$$n = 300 \geq 30 \quad np = 239,31 \geq 5 \quad n(1-p) = 60,69 \geq 5$$

On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$I = \left[0,7977 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,7977 \times 0,2023}{300}}; 0,7977 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,7977 \times 0,2023}{300}} \right]$$

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,7977 \times 0,2023}{300}} = 0,0455 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$I = [0,7522; 0,8432]$$

La proportion, de climatiseurs ayant encore leur mode mécanique en fonctionnement après 48 mois, observée

dans l'échantillon est : $f = \frac{246}{300} = 0,82$.

0,82 appartient à I donc **il n'y a pas lieu de remettre en cause le résultat donné par le service statistique.**