Exercice 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1111. . . . sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1.

$$N_p = \underbrace{11....1}_{\text{p répétitions de chiffre 1}} = \sum_{k=0}^{k=n-1} 10^k$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.

2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
2.a. Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \bmod 3$
2.b. En déduire que $N_p \equiv p \bmod 3$
2.c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.

3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
3.a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unque entier relatif appartenant à {-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3} tel que $10^p \equiv a \bmod 7$
On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

2.b. Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1 \bmod 7$ si et seulement si p et un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

2.c. Justifier que, pour tout entier naturel p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$

2.d. Démontrer que « 7 divise N_p . » est équivalent à « 7 divise $9N_p$. »
2.e. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'ériture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est à dire $n^2 \equiv 1 \bmod 10$
1.a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

n ≡ . . .[10]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 ≡ . . . [10]										

1.b. En déduire qu'il existe un entier naturel n tel que $n=10m+1$ ou $n=10m-1$.
1.c. Conclure que $n^2 \equiv 1 \mod 20$

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

CORRECTION

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Pour tout entier naturel p, non nul, le chiffre des unités N_p est 1.
donc $N_p \equiv 1 \bmod 10$ et il existe un entier naturel k tel que $N_p = 10k+1$.
$10 = 2\times 5$ donc $10 \equiv 0 \bmod 2$ et $10 \equiv 0 \bmod 5$
$N_p \equiv 1 \bmod 2$ et $N_p \equiv 1 \bmod 5$
Conclusion
N_p **n'est pas divisible par 2 et par 5.**

2.a. $10 = 3\times 3+1$ donc $10 \equiv 1 \bmod 3$
Pour tout entier naturel j, on a : $10^j \equiv 1^j \bmod 3$ soit $10^j \equiv 1 \bmod 3$

2.b. Pour tout entier naturel p, non nul :

$$N_p = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k = \underbrace{10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^1 + x10^0}_{\text{p termes}}$$

$$N_p \equiv \underbrace{1+1+\dots+1+1}_{\text{p t ermes}} \bmod 3$$

et $N_p \equiv p \bmod 3$

2.c. N_p **es divisible par 3 si et seulement si p est divisible par 3 c'est à dire p=3k avec k entier naturels non nul.**

3.a.

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	-1	-3	-2	1

On effectue la division euclidienne de p par 7.
$p = 6q+r$ avec r entier naturel compris entre 0 et 5.
$10^p = 10^{6q+r} = (10^5)^q \times 10^r$ or $10^6 \equiv 1 \bmod 7$
donc $10^p \equiv 1^q * 10^r \bmod 7$ soit $10^p \equiv 10^r \bmod 7$
$10^p \equiv 1 \bmod 7 \Leftrightarrow 10^p - 1 \equiv 0 \bmod 7 \Leftrightarrow 10^r - 1 \equiv 0 \bmod 7$

- Si r=1 alors $10^r \equiv 3 \bmod 7$ et $10^r - 1 \equiv 2 \bmod 7$
  donc 10^p n'est pas congru à 1 modulo 7.
- Si r=2 alors $10^r \equiv 2 \bmod 7$ et $10^r - 1 \equiv 1 \bmod 7$
  donc 10^p n'est pas congru à 1 modulo 7.
- Si r=3 alors $10^r \equiv -1 \bmod 7$ et $10^r - 1 \equiv -2 \bmod 7$
  donc 10^p n'est pas congru à 1 modulo 7.
- Si r=4 alors $10^r \equiv -3 \bmod 7$ et $10^r - 1 \equiv -4 \bmod 7$
  donc 10^p n'est pas congru à 1 modulo 7.
- Si r=5 alors $10^r \equiv -2 \bmod 7$ et $10^r - 1 \equiv -3 \bmod 7$
  donc 10^p n'est pas congru à 1 modulo 7.
- **Si r=0 alors** $10^r \equiv 0 \bmod 7$ **et** $10^r - 1 \equiv 0 \bmod 7$
  donc 10^p **est congru à 1 modulo 7.**

Conclusion
$10^p \equiv 1 \bmod 7$ **si et seulement si p = 6q (p est un multiple de 6)**

3.c. Pour tout entier naturel p, non nul.

$$N_p=\sum_{k=0}^{k=p-1}10^k=10^0+10^1++10^{p-2}+10^{p-1}$$

Somme des p premiers nombres de la suite géométrique de raison 10 et de premier terme $10^0=1$.

donc $N_p=\frac{10^p-10^0}{10-1}=\frac{10^p-1}{9}$.

3.d. Si 7 divise N_p alors 7 duvise tout multiple de N_p en particulier 7 divise $9N_p$.

. si 7 divise $9N_p$ or 7 et 9 sont premiers entre eux donc **le théorème de GAUSS** nous permet d'affirmer que 7 divise N_p .

. Conclusion

7 divise N_p si et seulement si 7 divise $9N_p$.

3.e. On a pour tout entier naturel p, non nul : $N_p=\frac{10^p-1}{9}$ soit $9N_p=10^p-1$.

N_p **est divisible par 7 si et seulement si** $9N_p$ **est divisible par 7 si et seulemenr si** $10^p-1\equiv 0 \bmod 7$ **si et seulement si p est un multiple de 6.**

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1.a. Pour remplir le tableau il suffit de déterminer le chiffre des unités du carré du chiffre des unités de n.

n ≡ . . .[10]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 ≡ . . . [10]	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

1.b. $n^2\equiv 1 \bmod 10$ si et seulement si le chiffre des unités de n est 1 ou 9.
donc $n=10k+1$ ou $n=10k+9=10k+10-1=10(k+1)-1$ avec k entier naturel.
Dans le premier cas on pose m=k $(n=10m+1)$ et dans le deuxième cas on pose m=k+1 $(n=10m-1)$.

1.c. Si $n=10m+1$ alors $n^2=(10m+1)^2=100m^2+20m+1=20(5m^2+m)+1$ donc $n^2\equiv 1 \bmod 20$
Si $n=10m-1$ alors $n^2=(10m-1)^2=100m^2-20m+1=20(5m^2-m)+1$ donc $n^2\equiv 1 \bmod 20$

2. Pour p entier naturel supérieur ou égal à 2.
$N_p=K\times 100+10^1+10^0=K\times 100\times 11$ K est un entier naturel
donc $N_p\equiv 11 \bmod 20$
Le reste de la division euclidienne de N_p par 20 est égal à 11.

3. Pour tout entier naturel p, supérieur à 2, si N_p est le carré d'un entier naturel n alors $N_p=n^2\equiv 1 \bmod 20$
donc le reste de la division euclidienne de N_p par 20 est 1.
Or nous avons démontré que le reste de la division euclidienne de N_p est 11.
Conclusion
N_p **n'est pas le carré d'un entier.**