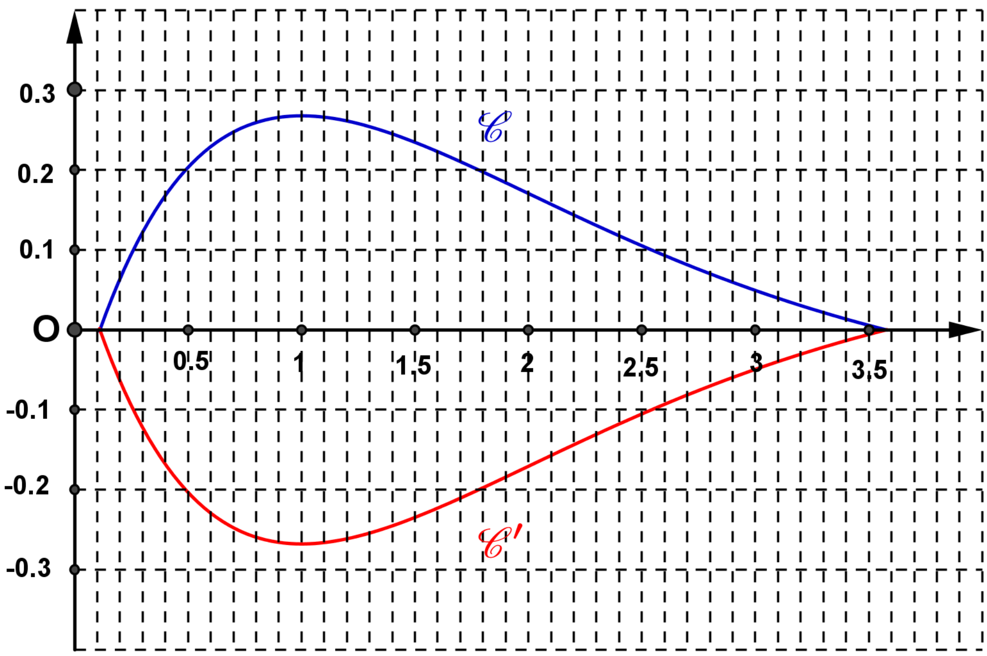
Exercice 1 — 4 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\,e^{-x}-0,1$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle [0;1].

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha<\beta$ et $f(\beta)=0$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur $[\alpha;\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.
Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$ par :
$$F(x)=-(x+1)e^{-x}-0,1\,x$$
est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$.
5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha=0,112$ et $\beta=3,577$.
6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $f(x)=x\,e^{-x}-0{,}1$

1. $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ $\qquad f(x)=\dfrac{x}{e^x}-0{,}1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ (résultat de cours) donc pour l'inverse $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$

Conclusion

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ **- 0,1**

2. f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$

$f'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$; $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de : 1-x.

$1-x\leqslant 0 \iff 1\leqslant x$

$1-x\geqslant 0 \iff 1\geqslant x$

$f(0)=0\times e^0-0{,}1=-0{,}1$

Tableau de variations

x	0		1		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	- 0.1	↗	f(1)	↘	- 0.1

$f(1)=e^{-1}-0{,}1=\dfrac{1}{e}-0{,}1 = 0{,}27$ à 10^{-2} près

3. f est continue et strictement croissante sur [0;1], f(0)=-0,1 < 0 et $f(1)=\dfrac{1}{e}-0{,}1>0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution à l'équation f(x) = 0.

On note α cette solution.

4. F est dérivable sur $[\alpha;\beta]$.

Pour tout nombre réel x de cet intervalle.

$F'(x)=-1\times e^{-x}-(x+1)\times(-e^{-x})-0{,}1=-e^{-x}+(x+1)e^{-x}-0{,}1$

$F'(x)=x\,e^{-x}-0{,}1=f(x)$

donc **F est une primitive de f sur** $[\alpha;\beta]$.

5. On donne le signe dela fonction f sur $[0;+\infty[$ en utilisant les résultats précédents

x	0		α		1		β		+∞
f(x)	- 0.1	↗	0	↗	f(1)	↘	0	↘	- 0.1
signe de f(x)		−	0		+		0	−	

f est continue et positive sur $[\alpha;\beta]$ donc l'aire, en unités d'aire, du domaine plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\beta$ est :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=F(\beta)-F(\alpha)$$

$\mathscr{C}'$ est la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ sur $[\alpha;\beta]$ donc l'aire du domaine plan compris entre les deux courbes est égale à deux fois l'aire précédente c'est à dire : $2(F(\beta)-F(\alpha))$ en unités d'aire

$\beta=3{,}877$ à 10^{-3} près $F(\beta)=-(\beta+1)e^{-\beta}-0{,}1\beta$ = -0,486 à 10^{-3} près

$\alpha=0{,}112$ à 10^{-3} près $F(\alpha)=-(\alpha+1)e^{-\alpha}-0{,}1\alpha$ = -1,005 à 10^{-3} près

$F(\beta)-F(\alpha)=0{,}519$ à 10^{-3} près et $2(F(\beta)+F(\alpha))=1{,}038$ à 10^{-3} près.

L'aire du domaine considéré est égal à 1,04 à 10^{-2} près.

6. Une unité sur chaque axe représente 5m donc l'unité d'aire représente $25\,m^2$;

L'aire du massif floral est : $25\times1{,}04=26\,m^2$.

Le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif est :

36×26 = **936 plants**