Exercice 2 — 4 points

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture.
On note x La variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.
Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu=125$ et d'écart-type σ.

1.a. Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relationentre :
$P(X\leqslant 125-t)$ et $P(X\geqslant 125-t)$.

1.b. On sait que 2,3 % des pots de confiturecontiennent moins de 121 grammes de confiture.
En utilisant la relation précédante, déterminer :
$P(121\leqslant X\leqslant 129)$.

2. Déterminée une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que :
$P(123\leqslant X\leqslant 127)=0{,}68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma=2$

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

3.a. On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

3.b. On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ?
On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

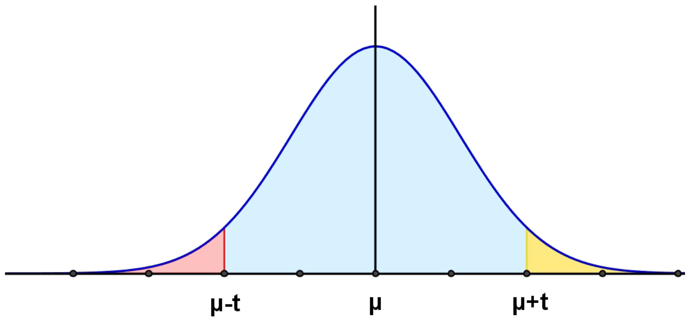
4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est 0,988.
On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante :
« La mahine est bien réglée » ?

CORRECTION

X suit une loi normale de moyenne $\mu=125$ et d'écart-type σ

1.a. Pour tout nombre réel t strictement positif on a :

$$P(X\leqslant\mu-t)=P(\mu+t\leqslant X)=\frac{1}{2}(1-P(\mu-t\leqslant X\leqslant\mu+t))$$



donc $P(X\leqslant 125-t)=P(125+t)=\frac{1}{2}(1-P(125-t\leqslant X\leqslant 125+t))$

1.b. 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture donc :

$P(X\leqslant 121)=0{,}023$

$P(X\leqslant 121)=P(X\leqslant 125-4)$ donc $t=4$

$P(X\leqslant 121)=P(125+4\leqslant X)=\frac{1}{2}(1-P(125-4\leqslant X\leqslant 125+4))$

et $P(121\leqslant X\leqslant 129)=1-2P(X\leqslant 121)=1-2\times 0{,}023=1-0{,}046$

$P(121\leqslant X\leqslant 129)=$ **0,954**

2. On sait que si X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ alors $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}68$

Or $P(125-2\leqslant X\leqslant 125+2)=0{,}68$ donc $\sigma=$ **2** (à l'unité près)

3.a. La probabilité, qu'un pot de confiture pris au hasard est conforme, est $P(120\leqslant X\leqslant 130)$.

En utilisant la calculatrice on obtient : $P(120\leqslant X\leqslant 130)=$ **0,9876**

3.b. On nous demande de calculer la probabilité de l'événement $(X\leqslant 120)$ sachant que l'événement $(X\leqslant 130)$ est réalisé.

$$P_{(X\leqslant 130)}(X\leqslant 120)=\frac{P(X\leqslant 120)}{P(X\leqslant 130)}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$P(X\leqslant 120)=0{,}0062$ à 10^{-4} près

$P(X\leqslant 130)=0{,}9938$ à 10^{-4} près

$P_{(X\leqslant 130)}(X\leqslant 120)=$ **0,0062** à 10^{-4} près

4. La proportion de pots de confiture conformes dans l'échantillons de 900 pots est :

$f=\frac{871}{900}=0{,}968$ à 10^{-3} près.

$n=900\geqslant 30 \qquad p=0{,}988 \qquad np=889{,}2\geqslant 5 \qquad n(1-p)=10{,}8\geqslant 5$

On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}\,;p+\sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}\right]$$

$$I=\left[0{,}988-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}988\times 0{,}012}{900}}\,;0{,}988+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}988\times 0{,}012}{900}}\right]$$

En utilisant la calculatrice

$1,96\times\sqrt{\frac{0,988\times 0,012}{900}}=0,007$ à 10^{-3} près

$I=[0,981\,;0,995]$

0,968 n'appartient pas à

Au seuil de 95 % on rejette l'hypothèse : « La machine est bien réglée ».