Exercice 3 — 4 points

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre réel z non nul associe le nombre complexe f(z) défini par :

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe f(z).

1. On appelle A le point d'affixe $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.a. Déterminer la forme exponentielle de a.
1.b. Déterminer la forme algébrique de f(a).

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation f(x)=1.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
3.a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z=e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
3.b. Montrer que f(z) est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que f(z) soit un nombre réel.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $|a|=1$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a=e^{i\frac{3\pi}{4}}$

1.b. $f(a)=a+\frac{1}{a}=e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{3\pi}{4}}=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

2. $f(z)=1 \Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2+1=z \Leftrightarrow z^2-z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=(i\sqrt{3})^2$

$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$z_1=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\mathcal{S}=\{ z_1 ; z_2 \}$

3.a. M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 si et seulement si OM=1 c'est à dire si et seulement si l'affixe z du point M est de module 1 si et seulement si $z=e^{i\theta}$ avec θ nombre réel.

3.b. $f(z)=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$ donc f(z) est un nombre réel.

4. $z=x+iy$ x et y sont des nombres réels tels que $x^2+y^2\neq 0$

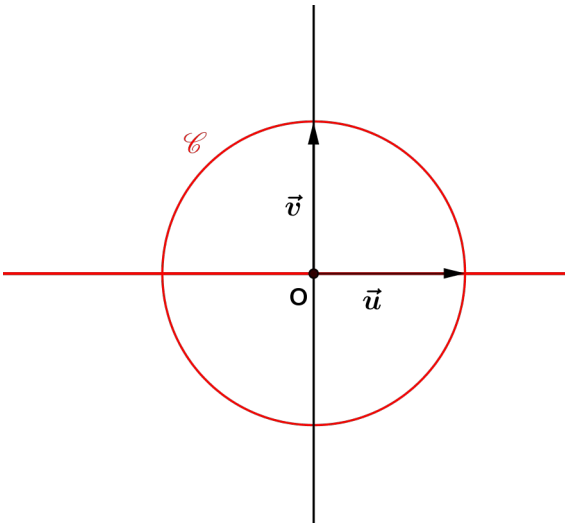
$f(z)=z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)(x+iy)+x-iy}{x^2+y^2}$

$f(z)=\frac{(x^2+y^2)x}{x^2+y^2}+i\frac{(x^2+y^2)y-y}{x^2+y^2}$

f(z) est un nombre réel si et seulement si $(x^2+y^2)y-y=0$ et $x^2+y^2\neq 0$

c'est à dire $(x^2+y^2-1)y=0$ et $x^2+y^2\neq 0$ soit ($x^2+y^2=1$ ou $y=0$) et $x^2+y^2\neq 0$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que f(z) soit un réel est la réunion du cercle $\mathscr{C}$ (de centre O et de rayon 1) et l'axe des abscisses privé de l'origine.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés