Exercice 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la $n^{\text{ième}}$ année. Ainsi , on a :
$u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}8\,u_n+c$.

Partie A

On suppose dans partie seulement que $c=1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n) .

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n=5-4\times 0{,}8^n$.

3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1, en justifiant votre réponse.
Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

CORRECTION

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c=1$ donc $u_0=1$ et pour tout entir naturel n : $u_{n+1}=0{,}8u_n+1$.

1. On calcule les premiers termes de la suite (u_n) en utilisant la calculatrice.
$u_0=1$; $u_1=1{,}8$; $u_2=2{,}44$; $u_3=2{,}952$; $u_4=3{,}3616$ ....
On conjecture que **la suite est croissante.**
$0<0{,}8<1$ Donc la suite (u_n) est convergente.
Pour conjecturer la valeur de la limite, on continue de calculer les valeurs des termes successifs de la suite (u_n) à 10^{-4} près.
$u_5=3{,}6893$; $u_6=3{,}9514$ .... $u_{10}=4{,}5705$; $u_{11}=4{,}6564$ .... $u_{20}=4{,}9539$; $u_{21}=4{,}9631$ ....
$u_{30}=4{,}9950$; $u_{31}=4{,}9960$ .... $u_{36}=4{,}9987$: $u_{37}=4{,}9990$; $u_{38}=4{,}9992$ ....
On peut conjecturer que **la suite converge vers 5.**

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :
$u_n=5-4\times 0{,}8^n$.

- <u>Initialisation</u>
  Pour $n=0$ $u_0=1$ et $5-4\times 0{,}8^0=5-4=1$
  La propriété est vérifiée pour $n=0$
- <u>Hérédité</u>
  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $u_n=5-4\times 0{,}8^n$ et on doit démontrer que $u_{n+1}=5-4\times 0{,}8^{n+1}$.
  Or $u_{n+1}=0{,}8u_n+1=0{,}8\times(5-4\times 0{,}8^n)+1=4-4\times 0{,}8^{n+1}+1=5-4\times 0{,}8^{n+1}$
- <u>Conclusion</u>
  Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n=5-4\times 0{,}8^n$.

3. Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}-u_n=0{,}8u_n+1-u_n=1-0{,}2u_n=1-0{,}2\times(5-4\times 0{,}8^n)=1-1+0{,}8^{n+1}=0{,}8^{n+1}>0$
Donc (u_n) **est une suite strictement croissante.**
$0<0{,}8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$ **5.**
Le nombre des abeilles augmentera tous les ans et dans un avenir « très lointain » ce nombre sera voisin de 5 (dizaines de milliers) soit 50 000.

Partie B

$u_0=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8u_n+c$.
Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-5c$ soit $u_n=v_n+5c$.

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-5c=0{,}8u_n+c-5c=0{,}8\times(v_n+5c)-4c=0{,}8v_n+4c-4c=0{,}8v_n$
$v_0=u_0-5c=1-5c$
(v_n) **est la suite géométrique de premier terme v_0 =1-5c et de raison q=0,8.**

2. Pour tout entier naturel n :
$v_n=v_0\times q^n=(1-5c)\times 0{,}8^n$

3. Pour tout entier naturel n :
$u_n=v_n+5c=5c+(1-5c)\times 0{,}8^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5c$

c est exprimé en dizaines de milliers et 100 000 st égal à 10 dizaines de milliers.
L'apiculteur atteint son objectif si et seulement si $5c = 10$ donc **$c = 2$.**

Pour atteindre son objectif l'apiculteur doit acheter tous les ans 20 000 abeilles.