Exercice 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers dans cette population au bout du $n^{\text{ième}}$ jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5100 fourmis.
Ainsi on a $u_0=5$ et $u_1=5{,}1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2}-u_{n+1}=0{,}9(u_{n+1}-u_n)$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2=5{,}19$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1}=AV_n$.
On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n=A^nV_0$.

2.b. On pose $P=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
A l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1} .
En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D=P^{-1}AP$.

2.c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n=PD^nP^{-1}$.
Pour tout entier naturel n, on admet que :

$$A^n=\begin{pmatrix} -10\times 0{,}9^{n+1}+10 & 10\times 0{,}9^{n+1}-9 \\ -10\times 0{,}9^n+10 & 10\times 0{,}9^n-9 \end{pmatrix}$$

2.d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=6-0{,}9^n$

3. Calculer la taille de la colonie au bout du $10^{\text{ème}}$ jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n) Interpréter ce résultat dans le contexte.

CORRECTION

$u_0=5$; $u_1=5{,}1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2}-u_{n+1}=0{,}9(u_{n+1}-u_n)$

1. Pour n=0 $u_2-u_1=0{,}9(u_1-u_0)$

$u_2=0{,}9\,u_1-0{,}9\,u_0+u_1=1{,}9\,u_1-0{,}9\,u_0=1{,}9\times 5{,}1-0{,}9\times 5=$ **5,19.**

2. Pour tout entier naturel n : $V_n=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.a. Pour tout entier naturel n : $AV_n=\begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}9\,u_{n+1}-0{,}9\,u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

Or $u_{n+2}=0,{,}9(u_{n+1}-u_n)+u_{n+1}=1{,}9\,u_{n+1}-0{,}9\,u_n$

Donc $AV_n=\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}=V_{n+1}$

On admet que pour tout entier naturel n, $V_n=A^nV_0$.

2.b. $P=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la calculatrice on obtient : $P^{-1}=\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$

$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -19+10 & 9 \\ 19-9 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}81+9 & -9+9 \\ 9-9 & 10-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.c. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, ona : $A^n=PD^nP^{-1}$.

- Remarques

  On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $PP^{-1}=P^{-1}P=I$.

  On convient que $A^0=I$ et que $D^0=I$

  $D=P^{-1}AP \Leftrightarrow PDP^{-1}=P(P^{-1}AP)P^{-1}=(PP^{-1})A(PP^{-1})=IAI=A$ donc $A=PDP^{-1}$

- Initialisation

  Pour n=0 $A^0=I$ et $PD^0P^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$

  La propriété est vérifiée pour n=0.

- Hérédité

  Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n on suppose que $A^n=PD^nP^{-1}$ et on doit démontrer que $A^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}$.

  On a $A^{n+1}=A^nA=(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})=PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^nIP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$

- Conclusion

  Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $A^n=PD^nP^{-1}$.

2.d. On admet que pour tout entier naturel n :

$A^n=\begin{pmatrix} -10\times 0{,}9^{n+1}+10 & 10\times 0{,}9^{n+1}-9 \\ -10\times 0{,}9^n+10 & 10\times 0{,}9^n-9 \end{pmatrix}$

On a : $V_n=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}=A^n V_0=A^n\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 5,1 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} u_{n+1}=5,1(-10\times 0,9^{n+1}+10)+5(10\times 0,9^{n+1}-9) \\ u_n=\quad 5,1(-10\times 0,9^n+10)+5(10\times 0,9^n-9) \end{cases}$

$u_n=-51\times 0,9^n+51+50\times 0,9^n-45$

$u_n=6-0,9^n$

3. La taille de la colonie de fourmis au bout du $10^{\text{ème}}$ jour est u_{10}

$u_{10}=6-0,9^{10}=6-0,348$ à 10^{-3} près.

$u_{10}=5,652$ à 10^{-3} près

La taille de la colonie au bout du $10^{\text{ème}}$ jour est **5652 fourmis.**

4. $0<0,9<1$ $\lim_{n\to+\infty} 0,9^n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=$ **6.**

Donc dans un avenir très lointain la taile de la colonie sera voisine de 6000 fourmis.