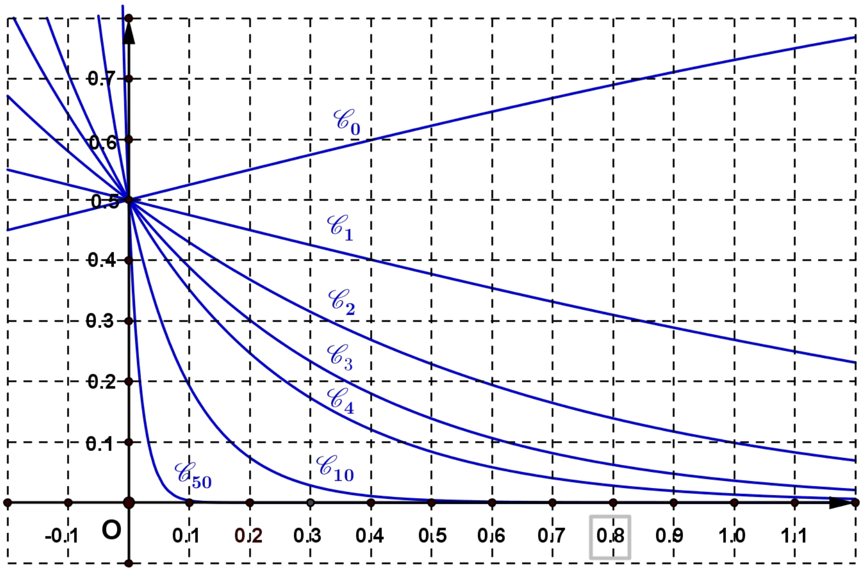
Exercice 1 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\dfrac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$.
On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_n$ pour différentes valeurs de n.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.



Partie A- Etude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude 0,05.

Partie B- Etude théorique

1. Montrer que $u_0=\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0+u_1=1$ puis en déduire u_1
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 0$.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel x, $d_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$.
4.a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $d_n(x)=e^{-nx}\times\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$
4.b. Etudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle [0;1].
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. On note l la limite de la suite (u_n)
6.a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 1, on a :

$$u_n+u_{n+1}=\frac{1-e^{-n}}{n}$$

6.b. En déduire la valeur de l.

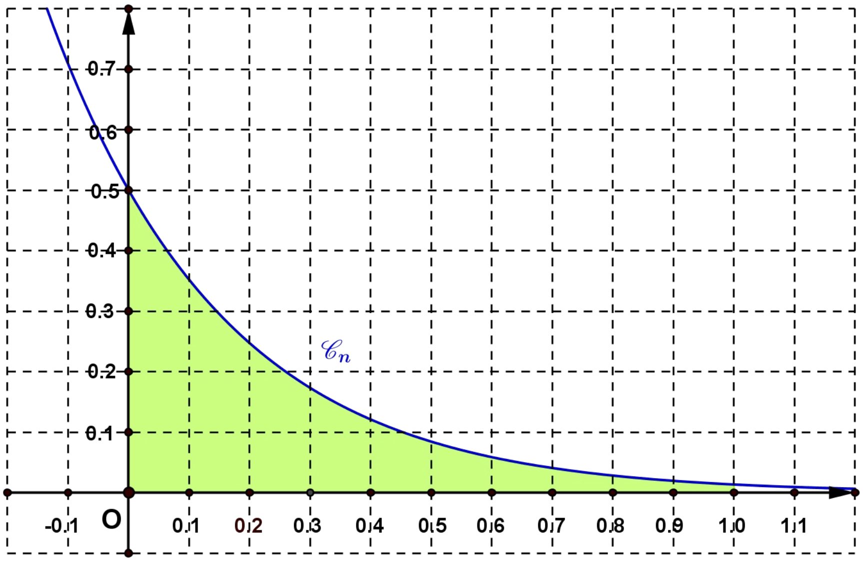
6.c. On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.
Recopier et compléter les lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant ;

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que K < N
	Affecter . . . . . à U
	Affecter . . . . . à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

CORRECTION

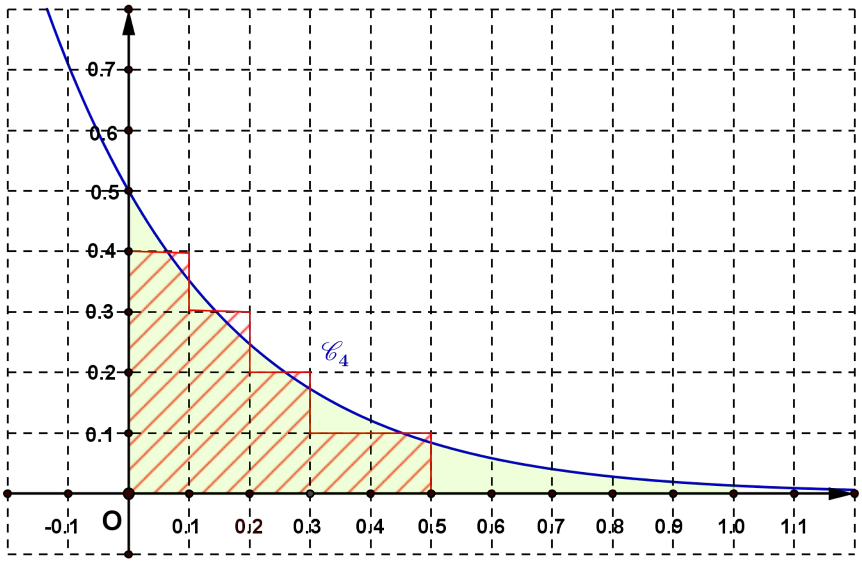
Partie A

1. f_n est continue et positive sur [0;1] donc u_n est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et des droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (partie colorée en vert sur la figure ci-dessous).

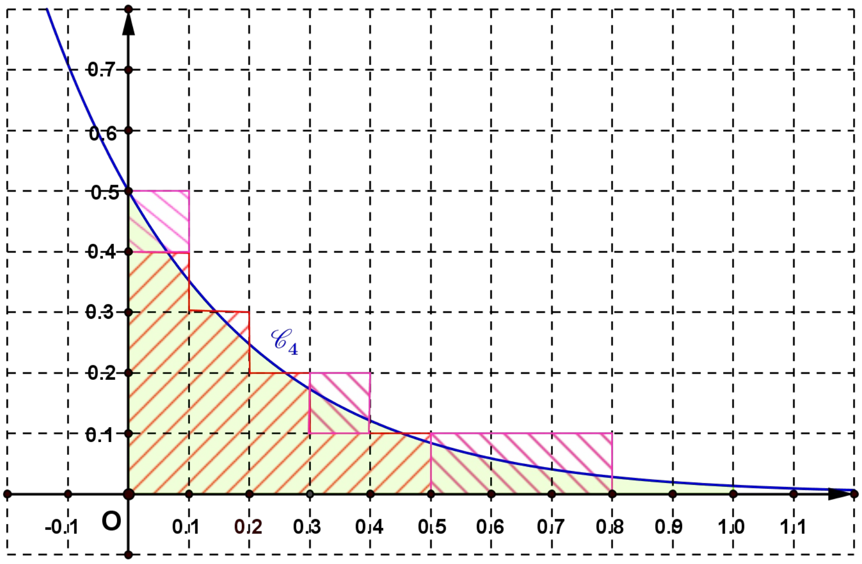


2. On remarque que $\mathscr{C}_{n+1}$ est située en dessous de $\mathscr{C}_n$ sur l'intervalle [0;1].
On conjecture que la suite (u_n) est décroissante.
On constate que pour n=50, $f_{50}(x)$ prend des valeurs « très voisines de zéro » pour des valeurs supérieures à $0{,}1$.
On peut conjecturer pour n prenant des valeurs très grandes, $\mathscr{C}_n$ est très proche de l'axe des ordonnées puis très proche de l'axe des abscisses donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3. On remarque qu'un carré de côté 0,1 a pour aire 0,01 U.A.



Sur la figure ci-dessus on a hachuré en rouge 11 petits carrés et graphiquement on peu t affirmer que l'aire de ces 11 carrés est inférieures à u_4 (u_4 est l'aire de la partie de plan colorée en vert).
On obtient : $0{,}11 \leqslant u_4$.



Sur la figure ci-dessus, on a hachuré en plus 5 nouveaux carrés en violet et graphiquement on peut affirmer que l'aire des 16 carrés est supérieurs des 16 carrés est supérieure à u_4.
Donc $u_n \leqslant 0,16$.
Conclusion

$$0,11 \leqslant u_4 \leqslant 0,16$$

Partie B

1. Pour tout nombre réel x, $f_0(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

Si on pose $u(x)=1+e^x>0$ alors $u'(x)=e^x$ et $f_0(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

La fonction F_0 définie par $F_0(x)=\ln(u(x))=\ln(1+e^x)$ est primitive f_0 sur $\mathbb{R}$.

$$u_0=\int_0^1 f_0(x)\,dx=F(1)-F(0)=\ln(1+e)-\ln(2)=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

2. Pour tout nombre réel x on a :

$$f_0(x)+f_1(x)=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^x}=1$$

$$\int_0^1 f_0(x)+f_1(x)\,dx = \int_0^1 f_0(x)\,dx + \int_0^1 f_1(x);dx = u_0+u_1$$

Si g est définie sur $\mathbb{R}$ par g(x)=1 alors G telle que G(x)=x est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

$$\int_0^1 g(x)\,dx=G(1)-G(0)=1$$

Conclusion

$$u_0+u_1=1$$

$$u_1=1-u_0=1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

3. On utilise la positivité de l'intégrale.

Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x on a $f_n(x)\geqslant 0$ donc $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \geqslant 0$.

4. Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x on a :

$$d_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^x}-\frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} = \frac{e^{-nx}}{1+e^x}-\frac{e^{-nx}\times e^x}{1+e^x} = e^{-nx}\times\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$$

Pour tout entier naturel n, le signe de $d_n(x)$ est le signe de $1-e^x$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $e^0=1\leqslant e^x\leqslant 1$ et $1-e^x\leqslant 0$

x	0 1
signe de $d_n(x)$	0 −

5. On a pour tout entier naturel n $f_{n+1}(x)-f_n(x)\leqslant 0$ donc $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$

et $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx$ soit $u_{n+1}\leqslant u_n$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.

6. On note $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

6.a. Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x :

$$f_n(x)+f_{n+1}(x)=\frac{e^{-(n-1)x}+e^{-nx}}{1+e^x}=\frac{e^{-nx}\times e^x+e^{-nx}}{1+e^x}=e^{-nx}\times\frac{e^x+1}{1+e^x}=e^{-nx}$$

Soit la fonction h_n définie pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x par $h_n(x)=e^{-nx}$.

La fonction H_n définie par $H_n(x)=-\frac{e^{-nx}}{n}$ est une primitive de h_n sur $\mathbb{R}$.

$$\int_0^1 (f_n(x)+f_{n+1}(x))\,dx=u_n+u_{n+1}=H_n(1)-H_n(0)=-\frac{e^{-n}}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1-e^{-n}}{n}$$

6.b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+u_{n+1})=21$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{n}=0.$

<u>Conclusion</u>

l = 0

6.c.

Entée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que K < N faire
	Affecter $\frac{-e^{-K}}{K}-U$
	Affecter K+1 à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U