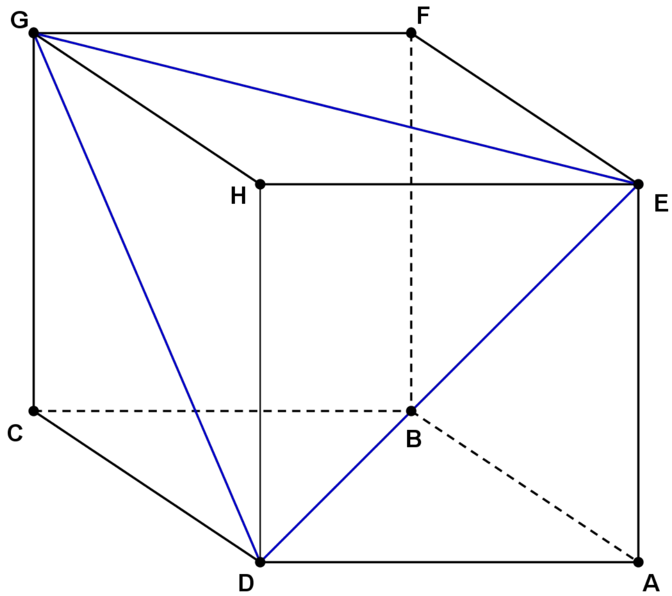
Exercice 2 5 points

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(B\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BF}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).

2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).

4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Déduire des questions précédentes les coordonnéesdu point P.

5. Que représente le point P pour que le triangle DEG ?
Justifiez la réponse.

CORRECTION

On détermine les coordonnées des sommets du cube dans le repère $(B;\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF})$.
$B(0;0;0)$ $A(1;0;0)$ $C(0;1;0)$ $F(0;0;1)$ $D(1;1;0)$ $E(1;1;0)$ $G(0,1;1)$ $H(1;1;1)$

1. La droite (BH) est la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BH}$.

$B(0;0;0)$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2. La droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG) si et seulement si $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG) (par exemples : $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$).

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DE}=1\times0+1\times(-1)+1\times1=-1+1=0$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DG}=1\times(-1)+1\times0+1\times1=-1+1=0$

$\overrightarrow{BH}$ est normal au plan (DEG).

(BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. $\overrightarrow{BH}$ est un vecteur normal du plan (DEG), donc :

$(DEG): x+y+z+d=0$

$D(1;1;0)$ appartient au plan (DEG).

$1+1+0+d=0$ Donc d=-2.

Le plan (DEG) a pour équation : x+y+z-2=0.

4. P est le point d'intersection de la droite (BH) et du plan (DEG).
Pour déterminer les coordonnées du point P ou résout le système :

$$\begin{cases}x+y+z-2=0\\x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$$

$$t+t+t-2=0\Leftrightarrow 3t=2\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$$

$$P\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$$

5. Le triangle EDG est équilatéral car $ED=EG=GD=\sqrt{2}$
Le point P est le centre du tiagle du triangle DEG.

$\overrightarrow{GP}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\times0+(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

(GP) est la hauteur du triangleDGE issue de G.

$\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EP}.\overrightarrow{DG}=\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-1)+\frac{2}{3}\times 0+1\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

(EP) est la hauteur du triangle DEG issue de E.

Conclusion

P est l'orthocentre du triangle DEG donc le centre du triangle équilatéral DEG.